Conteúdo:

1. Conjuntos numéricos: números inteiros, racionais e reais;
2. Sistema legal de medidas;
3. Razões e proporções; divisão proporcional; regras de três simples e compostas; porcentagens;
4. Equações e inequações de 1º e 2º graus;
5. Sistemas lineares;
6. Funções e gráficos;
7. Noções de estatística: gráficos e tabelas; médias, moda, mediana e desvio-padrão;
8. Progressões Aritméticas e Geométricas;
9. Princípios de contagem;
10. Noções de probabilidade;
11. Geometria plana: polígonos, perímetros e áreas; semelhança de triângulos; trigonometria do triângulo retângulo;
12. Geometria espacial: áreas e volumes dos sólido.

NÚMEROS INTEIROS, RACIONAIS E REAIS

NÚMEROS INTEIROS - OPERAÇÕES E PROPRIEDADES

Neste capítulo será feita uma revisão dos aspectos mais importantes sobre as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros.

ADIÇÃO

Os termos da adição são chamados **parcelas** e o resultado da operação de adição é denominado **soma** ou **total**.

1º parcela + 2º parcela = soma ou total

• A ordem das parcelas nunca altera o resultado de uma adição:

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

• O zero é **elemento neutro** da adição:

$$0+a=a+0=a$$

SUBTRAÇÀO

O primeiro termo de uma subtração é chamado **minuendo**, o segundo, **subtraendo** e o resultado da operação de subtração é denominado **resto** ou **diferença**.

minuendo - subtraendo = resto ou diferença

• A ordem dos termos pode alterar o resultado de uma subtração:

$$a - b \neq b - a \text{ (sempre que } a \neq b\text{)}$$

• Se **adicionarmos** uma constante **k** ao **minuendo**, o resto será **adicionado** de **k**.
• Se **adicionarmos** uma constante **k** ao **subtraendo**, o resto será **subtraído** de **k**.
• A subtração é a operação inversa da adição:

$$M-S = R \leftrightarrow R+S = M$$

• A soma do **minuendo** com o **subtraendo** e o **resto** é sempre igual ao **dobro** do **minuendo**.

$$M+S+R=2 \times M$$

Valor absoluto

O valor absoluto de um número inteiro indica a distância deste número até o zero quando consideramos a representação dele na reta numérica.

Atenção:
• O valor absoluto de um número nunca é negativo, pois representa uma distância.
• A representação do valor absoluto de um número **n** é I **n** I. (Lê-se "valor absoluto de **n**" ou "módulo de **n**".)

Números simétricos

Dois números **a** e **b** são ditos simétricos ou opostos quando:

$$\mathbf{a+b=0}$$

Exemplos:
-3 e 3 são simétricos (ou opostos) pois (-3) + (3) = 0.
4 e -4 são simétricos (ou opostos) pois (4) + (-4) = 0.
O oposto de 5 é -5.
O simétrico de 6 é -6.
O oposto de zero é o próprio zero.

Dois números simétricos sempre têm o mesmo módulo.

Exemplo:

I-3I=3 e I3I=3

Operações com números inteiros (Z)

Qualquer adição, subtração ou multiplicação de dois números inteiros sempre resulta também um número inteiro. Dizemos então que estas três operações estão bem definidas em **Z** ou, equivalentemente, que o conjunto **Z** é *fechado* para qualquer uma destas três operações.
As divisões, as potenciações e as radiciações entre dois números inteiros nem sempre têm resultado inteiro. Assim, dizemos que estas três operações não estão bem definidas no conjunto **Z** ou, equivalentemente, que **Z** não é fechado para qualquer uma destas três operações.

Adições e subtrações com números inteiros

Existe um processo que simplifica o cálculo de adições e subtrações com números inteiros. Observe os exemplos seguintes:

Exemplo$_1$:

Calcular o valor da seguinte expressão:
10 -7-9+15 -3+4

Solução:
Faremos duas somas separadas
- uma só com os números positivos:
  10+ 15+4=+29

- outra só com os números negativos:
  (-7)+(-9)+(-3)= -19

Agora calcularemos a diferença entre os dois totais encontrados.
+29 -19=+10

Atenção!
É preciso dar sempre ao resultado o sinal do número que tiver o maior valor absoluto!

Exemplo$_2$:
Calcular o valor da seguinte expressão:
-10+4 -7 –8 +3 -2

1º passo: Achar os totais (+) e (-):
(+): +4 + 3 = +7
(-): -10 -7 -8 -2= -27

2º passo: Calcular a diferença dando a ela o sinal do total que tiver o maior módulo:
-27+7=-20

MULTIPLICAÇÀO

Os termos de uma multiplicação são chamados **fatores** e o resultado da operação de multiplicação é denominado **produto**.
1º fator x 2º fator = produto

• O primeiro fator também pode ser chamado **multiplicando** enquanto o segundo fator pode ser chamado **multiplicador**.
• A ordem dos fatores nunca altera o resultado de uma multiplicação:
a x b = b x a

• O número 1 é **elemento neutro** da multiplicação:
1 x a = a x 1 = a

• Se **adicionarmos** uma constante **k** a **um** dos fatores, o produto será adicionado de **k vezes o outro fator:**
a x b = c ⟷ (a + k)x b = c+(k x b)

• Se **multiplicarmos** um dos fatores por uma constante **k**, o produto será multiplicado por **k**.
a x b = c ⟷ (a x k)x b = k x c
• Podemos **distribuir** um fator pelos termos de uma **adição** ou **subtração** qualquer:
a x(b ± c) = (a x b) ± (a x c)

DIVISÃO INTEIRA

Na divisão inteira de **N** por **D** $\neq$ 0, existirá **um único par de inteiros, Q** e **R**, tais que:

Q x D + R = N e 0 $\leq$ R < |D| (onde |**D**| é o valor absoluto de D)

A segunda condição significa que **R** (o **resto) nunca pode ser negativo.**

Os quatro números envolvidos na divisão inteira são assim denominados:
N é *o **dividendo;*** **D** é *o **divisor*** (sempre diferente de zero);
Q é o ***quociente;*** **R** é *o **resto*** (nunca negativo).

Exemplos:
1) Na divisão inteira de 60 por 7 *o **dividendo** é **60**, o **divisor*** é ***7**, o **quociente** é **8*** e o ***resto** é **4**.*

8 x 7 + 4= 60 e 0 $\leq$ 4 < |7|

2) Na divisão inteira de -60 por 7 o ***dividendo** é **-60**, o **divisor** é **7**, o **quociente*** é ***-9*** e o ***resto** é **3**.*

-9 x 7 + 3= -60 e 0$\leq$ 3 < |7|

• Quando ocorrer **R = 0** na divisão de **N** por **D**, teremos **Q** x **D** = **N** e diremos que a divisão *é **exata*** indicando-a como **N** $\div$ **D** = **Q**.
• Quando a divisão de **N** por **D** for exata diremos que **N** é ***divisível*** por **D** e **D** é *divisor* de **N** ou, equivalentemente, que **N** é ***múltiplo*** de **D** e **D** *é **fator*** de **N**.
• O zero é divisível por qualquer número não nulo:

D $\neq$ 0 $\longrightarrow$ 0 $\div$ D = 0.

• Todo número inteiro é divisível por **1**: $\forall$ **N**, **N** $\div$ **1 = N**.
• Se multiplicarmos o dividendo (**N**) e o divisor (**D**) de uma divisão por uma constante **k** $\neq$ **0,** o quociente (**Q**) não será alterado mas o resto (**R**) ficará multiplicado por **k**, se **R x k < D**, ou será igual ao resto da divisão de **R x k** por **D**, se **R x k $\geq$ D.**

Multiplicações e divisões com números inteiros

Nas multiplicações e divisões de dois números inteiros é preciso observar os sinais dos dois termos da operação:

Exemplos:

SINAIS IGUAIS $\longrightarrow$ (+)	SINAIS OPOSTOS $\longrightarrow$ (-)
(+5) x (+2) = +10 (-5) x (-2) = +10 (+8) - (+2) = +4 (-8) - (-2) = +4	(+5) x (-2) = -10 (-5) x (+2) = -10 (+8) - (-2) = -4 (-8) - (+2) = -4

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Numa adição com duas parcelas, se somarmos 8 à primeira parcela, e subtrairmos 5 da segunda parcela, o que ocorrerá com o total?

Solução:

Seja **t** o total da adição inicial.
Ao somarmos 8 a uma parcela qualquer, o total é acrescido de 8 unidades:

t+8

Ao subtrairmos 5 de uma parcela qualquer, o total é reduzido de 5 unidades:

t+8-5 = **t**+3

Portanto o total ficará ***acrescido de 3 unidades.***

2. Numa subtração, a soma do minuendo com o subtraendo e o resto é igual a 264. Qual é o valor do minuendo?

Solução:

Sejam **m** o **minuendo**, **s** o **subtraendo** e **r** o **resto** de uma subtração qualquer, é sempre verdade que:

m - s = r $\longrightarrow$ s + r =m

(a soma de **s** com **r** nos dá **m**)

Ao somarmos os três termos da subtração, **m**+**s**+**r**, observamos que a adição das duas últimas parcelas, **s** + **r**, resulta sempre igual a **m**. Assim poderemos escrever:

m+(s + r)= m + m =2m

O total será sempre o ***dobro do minuendo.***
Deste modo, temos:

$$\mathbf{m+s+r}=264$$
$$2\mathbf{m} = 264$$
$$\mathbf{m} = 264 \div 2 = 132$$

Resp.: O minuendo será 132.

3. Numa divisão inteira, o divisor é 12, o quociente é 5 e o resto é o maior possível. Qual é o dividendo?

Solução:

Se o divisor é 12, então o maior resto possível é 11, pois o resto não pode superar nem igualar-se ao divisor. Assim, chamando de **n** o dividendo procurado, teremos:

$$\mathbf{n} = (\text{quociente}) \times (\text{divisor}) + (\text{resto})$$
$$\mathbf{n}=5\text{x}12+11$$
$$\mathbf{n}=60+11$$
$$\mathbf{n}=71$$

O dividendo procurado é **71.**

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Numa adição com três parcelas, o total era 58. Somando-se 13 à primeira parcela, 21 à segunda e subtraindo-se 10 da terceira, qual será o novo total?

2. Numa subtração a soma do minuendo com o subtraendo e o resto resultou 412. Qual o valor do minuendo?

3. O produto de dois números é 620. Se adicionasse-mos 5 unidades a um de seus fatores, o produto ficaria aumentado de 155 unidades. Quais são os dois fatores?

4. Numa divisão inteira, o divisor é 12, o quociente é uma unidade maior que o divisor e o resto, uma unidade menor que o divisor. Qual é o valor do dividendo?

5. Certo prêmio será distribuído entre três vendedores de modo que o primeiro receberá R$ 325,00; o segundo receberá R$ 60,00 menos que o primeiro; o terceiro receberá R$ 250,00 menos que o primeiro e o segundo juntos. Qual o valor total do prêmio repartido entre os três vendedores?

6. Um dicionário tem 950 páginas; cada página é dividida em 2 colunas; cada coluna tem 64 linhas; cada linha tem, em média, 35 letras. Quantas letras há nesse dicionário?

7. Uma pessoa ganha R$ 40,00 por dia de trabalho e gasta R$ 800,00 por mês. Quanto ela economizará em um ano se ela trabalhar, em média, 23 dias por mês?

8. Um negociante comprou 8 barricas de vinho, todas com a mesma capacidade. Tendo pago R$ 7,00 o litro e vendido a R$ 9,00, ele ganhou, ao todo, R$ 1.760,00. Qual era a capacidade de cada barrica?

9. Em um saco havia 432 balinhas. Dividindo-as em três montes iguais, um deles foi repartido entre 4 meninos e os dois montes restantes foram repartidos entre 6 meninas. Quantas balinhas recebeu cada menino e cada menina?
10. Marta, Marisa e Yara têm, juntas, R$ 275,00. Marisa tem R$ 15,00 mais do que Yara e Marta possui R$ 20,00 mais que Marisa. Quanto tem cada uma das três meninas?

11. Do salário de R$ 3.302,00, Seu José transferiu uma parte para uma conta de poupança. Já a caminho de casa, Seu José considerou que se tivesse transferido o dobro daquele valor, ainda lhe restariam R$ 2.058,00 do seu salário em conta corrente. De quanto foi o depósito feito?

12. Renato e Flávia ganharam, ao todo, 23 bombons. Se Renato comesse 3 bombons e desse 2 para Flávia, eles ficariam com o mesmo número de bombons. Quantos bombons ganhou cada um deles?

NÚMEROS RACIONAIS OPERAÇÕES E PROPRIEDADES

CONCEITO

Dados dois números inteiros **a** e **b**, com **b** $\neq$ 0, denominamos **número racional** a todo número $\mathbf{x} = \frac{a}{b}$, tal que **x** x **b=a.**

$$x = \frac{a}{b} \leftrightarrow x \cdot b = a \left(\text{com } a \in Z \text{ e } b \in Z^*\right)$$

REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

Denominamos **representação fracionária** ou simplesmente **fração** à expressão de um número racional a na forma $\frac{a}{b}$.

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE UM NÚMERO RACIONAL

A representação decimal de um número racional poderá resultar em um do três casos seguintes:

Inteiro

Neste caso, a fração correspondente ao inteiro é denominada **fração *aparente.***

$$\frac{14}{2} = 7 \quad \frac{-9}{9} = -1 \quad \frac{0}{13} = 0$$

Expansão Decimal Finita

Neste caso, há sempre uma quantidade **finita** de algarismos na representação decimal.

$$\frac{-3}{2} = -1{,}5 \qquad \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Expansão Decimal Infinita Periódica

Esta representação também é conhecida como **dízima *periódica*** pois, nela, sempre ocorre alguma seqüência finita de algarismos que se repete indefinidamente. Esta seqüência é denominada *período.*

$$\frac{1}{3} = 0{,}333... \qquad \frac{1}{6} = 0{,}1666...$$

DETERMINAÇÃO DE UMA FRAÇÃO GERATRIZ

Todos os números com expansão decimal finita ou infinita e periódica sempre são números racionais. Isto significa que sempre existem frações capazes de representá-los. Estas frações são denominadas ***frações geratrizes.***

Como determinar uma fração geratriz

1° Caso - Números com expansão decimal finita
A quantidade de algarismos depois da vírgula dará o número de "zeros" do denominador:

$$8{,}16 = \frac{816}{100}$$

$$52{,}4 = \frac{524}{10}$$

$$0{,}035 = \frac{0035}{1000} = \frac{35}{1000}$$

2° Caso - Dízimas Periódicas

Seja **a,bc...nppp...** uma dízima periódica onde os primeiros algarismos, indicados genericamente por **a , b , c...n** , não fazem parte do período **p**.

A fração $\frac{abc...np - ab...n}{99...900...0}$ será uma geratriz da dízima periódica a,bc...nppp... se:

1º- o número de \`noves' no denominador for igual à quantidade de algarismos do período;
2º- houver um \`zero' no denominador para cada algarismo ***aperiódico*** (bc...n)**após a vírgula.**

Exemplo:

5,8323232... período: *32* (dois "noves" no denominador) atraso de 1 casa (1 "zero" no denominador)

parte não-periódica: *58* fração geratriz: $\frac{5832 - 58}{990} = \frac{5.774}{990}$

0,73444... período: *4* (1 "nove" no denominador) atraso de duas casas *(2* "zeros")

parte não-periódica: 073 fração geratriz:

$\frac{0734 - 073}{900} = \frac{734 - 73}{900} = \frac{661}{900}$

6,034034034... período: *034* (três "noves" no denominador) não houve atraso do período

(não haverá "zeros" no denominador)

parte não-periódica: *6*

fração geratriz: $\frac{6034 - 6}{999}$

0,525252... período: 52 (dois "noves") não houve atraso do período (não haverá "zeros" no denominador)

parte não-periódica: 0

fração geratriz: $\frac{052 - 0}{99} = \frac{52}{99}$

NÚMEROS MISTOS

Dados três números inteiros **n, a,** e **b,** com **n** $\neq$ 0 e 0 **<** a **<** b, denomina-se **número misto** à representação de um número racional escrito sob a forma

$$n\frac{a}{b} = n + \frac{a}{b}$$

Se numa divisão inteira não exata o valor absoluto do dividendo for maior que o do divisor, então, pode-se representar o seu resultado por um número misto.

Exemplo:
A divisão inteira de 30 por 7 não é exata, dando quociente 4 e resto 2. Então, pode-se escrever:

$$\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Com Denominadores Iguais

Conserva-se o denominador, adicionando ou subtraindo os numeradores.

$$\frac{3}{20} + \frac{5}{20} - \frac{7}{20} = \frac{3 + 5 - 7}{20} = \frac{1}{20}$$

Com Denominadores Diferentes

Substituem-se as frações dadas por outras, equivalentes, cujo denominador será o MMC dos denominadores dados:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{m.m.c(6,4,2)=12}} \frac{2}{12} + \frac{9}{12} - \frac{6}{12} = \frac{2 + 9 - 6}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{10}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} = \frac{10 + 3 - 6}{12} = \frac{7}{12}$$

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Para multiplicar duas ou mais frações deve-se:
1º) multiplicar os numeradores, encontrando o novo numerador;
2°) multiplicar os denominadores, encontrando o novo denominador.

$$\frac{2}{5}x\frac{3}{4}x\frac{1}{6}=\frac{2x3x1}{5x4x6}=\frac{6}{120}\xrightarrow{\text{simplific. por 6}}\frac{1}{20}$$
$$\frac{1}{6}x\frac{2}{5}x\frac{7}{4}=\frac{1x2x7}{6x5x4}=\frac{14}{120}\xrightarrow{\text{simplific.por 2}}\frac{7}{60}$$
$$\frac{1}{3}x\,2\,x\frac{1}{5}=\frac{1}{3}x\frac{2}{1}x\frac{1}{5}=\frac{1x2x1}{3x1x5}=\frac{2}{15}$$

DIVISÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES

Para efetuar uma divisão onde pelo menos um dos números envolvidos é uma fração, devemos multiplicar o primeiro número (dividendo) pelo inverso do segundo (divisor).

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{7}=\frac{2}{3}x\frac{7}{4}=\frac{2x7}{3x4}=\frac{14}{12}\xrightarrow{\text{simplif. por 2}}\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{1}{3}x\frac{5}{4}=\frac{1x5}{3x4}=\frac{5}{12}$$
$$2\div\frac{3}{5}=\frac{2}{1}x\frac{5}{3}=\frac{2x5}{1x3}=\frac{10}{3}$$
$$\frac{1}{6}\div 5=\frac{1}{6}x\frac{1}{5}=\frac{1x1}{6x5}=\frac{1}{30}$$

Atenção:

Não faça contas com **dízimas periódicas.**

Troque todas as dízimas periódicas por frações geratrizes antes de fazer qualquer conta.

Exemplo:

Calcular:

$0{,}6\div 0{,}222...=?$

$$=\frac{6}{10}\div\frac{2}{9}$$
$$=\frac{6}{10}x\frac{9}{2}=\frac{54}{20}=2{,}7$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular os resultados das expressões abaixo:

a) $8\frac{1}{2}+3\frac{2}{5}$

b) $15\frac{5}{6}-2\frac{3}{4}$

c) $2\frac{1}{3}x\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{2}\div 1\frac{3}{4}$

Soluções:

a)
$$\left(8+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{2}{5}\right)=(8+3)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)=$$
$$11+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)=11+\left(\frac{5}{10}+\frac{4}{10}\right)=11\frac{9}{10}$$

b)
$$\left(15+\frac{5}{6}\right)-\left(2+\frac{3}{4}\right)=(15-2)+\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)=$$
$$13+\left(\frac{10}{12}-\frac{9}{12}\right)=13\frac{1}{12}$$

c) $\left(2+\frac{1}{3}\right)x\frac{4}{5}=\frac{2x3+1}{3}x\frac{4}{5}=\frac{7}{3}x\frac{4}{5}=$
$\frac{7x4}{3x5}=\frac{28}{15}=1+\frac{13}{15}=1\frac{13}{15}$

d) $\frac{1}{2}\div\left(1+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\div\frac{1x4+3}{4}=\frac{1}{2}\div\frac{7}{4}=$
$\frac{1}{2}x\frac{4}{7}=\frac{4}{14}\xrightarrow{\text{simplif. por2}}\frac{2}{7}$

2. Determinar a fração geratriz de 0,272727... .

Solução:

$$0{,}272727\ldots=\frac{27}{99}=\frac{27\div 9}{99\div 9}=\frac{3}{11}$$

3. Quanto valem dois terços de 360?

Solução:

$$\frac{2}{3}\ \mathbf{de}\ 360=\frac{2}{3}\text{ x }360=\frac{2\text{ x }360}{3}=240$$

Então, dois terços de 360 são 240.

4. Se três quartos de **x** valem 360, então quanto vale **x**?

Solução:

$$\frac{3}{4}\text{ de }\mathbf{x}=360\rightarrow\frac{3\cdot x}{4}=360$$
$$3\cdot x=4\text{ x }360\rightarrow x=\frac{4\text{ x }360}{3}=480$$

Então, **x** vale 480.

5. Determinar uma fração que corresponda a dois terços de quatro quintos.

Solução:

$$\frac{2}{3}\text{ de }\frac{4}{5}=\frac{2}{3}x\frac{4}{5}=\frac{2\text{ x }4}{3\text{ x }5}=\frac{8}{15}$$

Então, uma fração correspondente será $\frac{8}{15}$.

6. Cínthia gastou em compras três quintos da quantia que levava e ainda lhe sobraram R$ 90,00. Quanto levava Cínthia, inicialmente?

Solução:

O problema menciona **quintos** da quantia que Cínthia levava. Pode-se indicar a quantia inicial por 5x (pois 5x tem quintos exatos).

$$\begin{array}{c}\text{(Inicial)}\\ 5x\end{array}\begin{cases}\text{gastos}\,\frac{3}{5}\text{ de }5x=3x\\ \text{sobram}:90{,}00\end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$\overbrace{5x}^{\text{inicial}}-\overbrace{3x}^{\text{gasto}}=\overbrace{90}^{\text{resto}}$$
$$2x=90$$
$$x=45$$

Como a quantia inicial foi representada por 5x, tem-se:

5x = 5 x 45 = 225,00

Cínthia levava, inicialmente, R$ 225,00.

7. Um rapaz separou 1/10 do que possuía para comprar um par de sapatos; 3/5 para roupas, restando-lhe, ainda, R$ 180,00. Quanto o rapaz tinha?

Solução:

Seja 10x a quantia inicial (pois tem **décimos** e tem **quintos exatos)**

$$10x \begin{cases} \text{sapatos}: \frac{1}{10} \text{ de } 10x = x \\ \text{roupas}: \frac{3}{5} \text{ de } 10x = 6x \\ \text{restante}: 180{,}00 \end{cases}$$

$$\overbrace{10x}^{\text{inicial}} \overbrace{- x - 6x}^{\text{gastos}} = \overbrace{180}^{\text{resto}}$$
$$3x = 180$$
$$x = 60$$

Portanto, o valor inicial era:

10x = 10 x 60 = 600,00 reais

O rapaz tinha, inicialmente, R$ 600,00.

8. De um reservatório, inicialmente cheio, retirou-se $\frac{1}{4}$ do volume e, em seguida, mais 21 litros. Restaram, então $\frac{2}{5}$ do volume inicial. Qual a capacidade deste reservatório?

Solução:

Seja 20x o volume do reservatório (pois tem **quartos** e **quintos** exatos).

$$20x \begin{cases} 1^{a} \text{ retirada}: \frac{1}{4} \text{ de } 20x = 5x \\ 2^{a} \text{ retirada}: 21 \text{ litros} \\ \text{resto}: \frac{2}{5} \text{ de } 20x = 8x \end{cases}$$

$$\overbrace{20x}^{\text{inicial}} \overbrace{- 5x - 21}^{\text{retiradas}} = \overbrace{8x}^{\text{resto}}$$

isolando os termos em "x" tem-se:

20x-5x-8x=21
7x=21
x=3

Como a capacidade do reservatório foi representada por 20x, tem-se:

20x = 20 x 3 = 60 litros

9. Rogério gastou $\frac{2}{3}$ do que tinha e, em seguida, $\frac{1}{4}$ do resto, ficando ainda com R$ 300,00. Quanto Rogério possuía inicialmente?

Solução:

Seja 12x a quantia inicial de Rogério:

$$\boxed{12x} \xrightarrow[(-8x)]{-\frac{2}{3}\text{ de }12x} \boxed{4x} \xrightarrow[(-x)]{-\frac{1}{4}\text{ de }4x} \boxed{3x} = 300{,}00 \text{ (resto)}$$

$$3x = 300$$
$$x = 100$$

Logo, a quantia inicial de Rogério era:

12x = 12 x 100 = 1.200 reais

Rogério possuía, inicialmente, R$ 1.200,00.

10. Um estojo custa $\frac{2}{3}$ a mais que uma caneta. Juntos eles valem R$ 16,00. Quanto custa cada objeto?

Solução:

Como o preço do estojo foi indicado para dois **terços** a mais que o preço da caneta, faremos:

caneta: 3x

estojo: $3x + \frac{2}{3} \text{ de } 3x = 3x + 2x = 5x$

Juntos eles valem R$ 16,00:

$$\overbrace{3x}^{\text{caneta}} + \overbrace{5x}^{\text{estojo}} = 16$$
$$8x = 16$$
$$x = 2$$

Então:

a caneta custa: 3x = 3 x 2 = 6 reais
o estojo custa: 5x = 5 x 2 = 10 reais

11. Um pai distribui certo número de balas entre suas três filhas de tal modo que a do meio recebe $\frac{1}{3}$ do total, a mais velha recebe duas balas a mais que a do meio, enquanto a mais nova recebe as 25 balas restantes. Quantas balas, ao todo, o pai distribuiu entre suas filhas?

Solução:

Seja o total de balas representado por 3x:

$$\begin{matrix}(\text{total}) \\ 3x\end{matrix}\begin{cases} \text{a do meio}: \frac{1}{3} \text{ de } 3x = x \\ \text{a mais velha}: x + 2 \\ \text{a mais nova}: 25 \end{cases}$$

Juntando todas as balas tem-se:

3x=x+x+2=25

isolando "x" na igualdade tem-se:

$3x-x-x=2+25$
$x=27$

Logo, o total de balas é: 3x = 3 x 27 = 81 balas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Efetue as expressões abaixo.

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$

b) $5\frac{1}{3}+2\frac{1}{5}-4\frac{1}{2}$

2. Efetue as multiplicações abaixo.

a) $\frac{2}{5}\text{x}\frac{15}{16}$

b) $1\frac{1}{3}\text{x } 2\frac{1}{2}$

3. Efetue as divisões abaixo.

a) $\frac{3}{4}\div\frac{6}{7}$

b) $2\frac{1}{2}\div 1\frac{1}{3}$

4. Julgue os itens abaixo em verdadeiros (V) ou falsos (F).

( ) 0,321321321...= $\frac{107}{333}$

( ) 0,00333 ...= $\frac{1}{300}$

( ) 12,37777...= $\frac{1.114}{90}=\frac{557}{45}$

5. Quanto valem três quintos de 1.500 ?

6. Se cinco oitavos de **x** são 350, então, qual é o valor de **x**?

7. Que fração restará de **x** se subtrairmos três sétimos do seu valor?

8. Se subtrairmos três sétimos do valor de **x** e, em seguida, retirarmos metade do restante, que fração restará de **x** ?

9. Determine o valor da expressão 6,666... x 0,6.

10. Determine o valor da expressão 0,5 $\div$ 0,16666... .

11. Um garoto possui $\frac{2}{3}$ da altura de seu pai que correspondem a $\frac{4}{3}$ da altura de seu irmão mais moço. Qual é a altura deste último se a altura do pai é 180 cm?

12. No primeiro dia de uma jornada, um viajante fez $\frac{3}{5}$ do percurso. No segundo dia, andou $\frac{1}{3}$ do restante. Quanto falta para completar a jornada se o percurso completo é de 750 km?

13. Se um rapaz separar o dinheiro que tem em três partes, sendo a primeira igual à terça parte e a segunda igual à metade do total, então a terceira parte será de R$ 35,00. Quanto dinheiro tem este rapaz?

14. A idade de Antônio é $\frac{1}{6}$ da idade de Benedito, César tem metade da idade de Antônio e Dilson tem tantos anos quantos César e Antônio juntos. Quais são as idades de cada um deles se a soma das quatro idades é 54 anos?

15. A soma de três números é 110. Determinar o maior deles sabendo que o segundo é um terço do primeiro e que o terceiro é $\frac{3}{8}$ da soma dos dois primeiros.

16. Dividir R$ 270,00 em três partes tais que a segunda seja um terço da primeira e a terceira seja igual à soma de um duodécimo da primeira com um quarto da segunda.

17. Determine o preço de custo de uma mercadoria sabendo que haveria um lucro de $\frac{1}{5}$ do preço de custo se ela fosse vendida por R$ 60,00.

18. Um comerciante gastou $\frac{1}{5}$ do que tinha em sua conta corrente. Em seguida, gastou $\frac{2}{7}$ do restante ficando ainda com um saldo de R$ 2.000,00. Considerando que havia inicialmente na conta corrente $\frac{5}{6}$ do total que o comerciante possuía entre uma conta de poupança e a conta corrente, determine o valor que havia na conta de poupança.

19. Se adicionarmos a terça parte de um número à sua metade o resultado obtido será 3 unidades menor que o número inicial. Qual é este número?

20. Márcio tinha R$ 116,00 que estavam divididos em partes diferentes entre os dois bolsos da calça que usava. Se ele gastasse a quinta parte do que havia no bolso esquerdo e a sétima parte do que havia no bolso direito restariam quantias iguais nos dois bolsos. Quanto havia em cada bolso?

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais compreende ***todos os números que permitam representação na forma decimal, periódica ou não periódica.*** Isto compreende todos os números inteiros, todos os números racionais e mais os números com representação decimal não periódica.
São exemplos de números reais:

2 = 2,000...
1/5 = 0,2000...
4/9 = 0,444...
π = 3,141592653...
$\sqrt{2}$ =1,414213...

Números Irracionais

Alguns números têm representação decimal infinita e aperiódica não sendo, portanto, números racionais. A estes números denominamos números irracionais.

Números Irracionais:
têm representação decimal...
... infinita
e
... aperiódica.

O conjunto dos números irracionais é usualmente representado por I.

São exemplos de números irracionais:
π = 3,14159265358979323846...
e = 2,71828182846...
$\sqrt{2}$ = 1,41421356237...

A operação de radiciação produz, freqüentemente, números irracionais. A raiz de um número natural qualquer, ou resultará também número natural ou será um número irracional.

$$\sqrt[n]{\text{núm. natural}} = \begin{cases} \text{núm. natural} \\ \text{ou} \\ \text{núm. irracional} \end{cases}$$

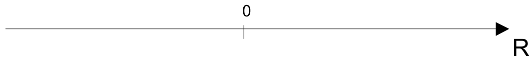
Exemplos:

$\sqrt{12}$ é um número irracional

$\sqrt[3]{10}$ é um número irracional

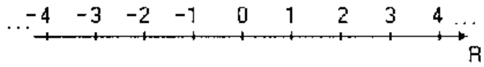
Representação dos Números por Pontos da Reta

Podemos representar todos os números reais como pontos em uma reta orientada denominada **reta numérica**. Inicialmente, escolhe-se um ponto sobre a reta para indicar o número **zero**.



Depois, marcam-se os demais números inteiros, mantendo sempre a mesma distância entre dois inteiros consecutivos quaisquer, sendo:

• os positivos, à direita de zero, a partir do 1 e em ordem crescente para a direita;
• e os negativos à esquerda de zero, a partir do -1 e em ordem decrescente para a esquerda;

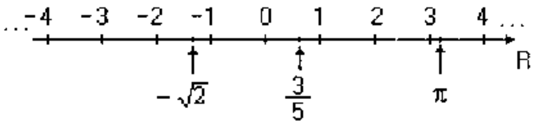


Todos os demais números reais não inteiros, racionais ou irracionais, podem ser localizados entre dois números inteiros.
Observe, por exemplo, onde estão localizados os números $-\sqrt{2}$, 3/5 e π:

$-\sqrt{2}$ =-1,41421356237...

3/5 = 0,6

π = 3,1415926535...



Intervalos de Números Reais

É comum designarmos por ***intervalo*** a qualquer subconjunto de **R** que corresponda a segmentos ou a semi-retas ou a qualquer reunião entre segmentos ou semi-retas da reta dos números reais.

Exemplos:

a) Representação Gráfica:

-5 2

Notação de Conjuntos: {x $\in$ **R**/-5 $\leq$ x $\leq$ 2}

Notação de Intervalos: [-5; 2]

b) Representação Gráfica:

-5 2

Notação de Conjuntos: { x $\in$ **R**/-5 $\leq$ x < 2 }

Notação de Intervalos: [-5; 2[

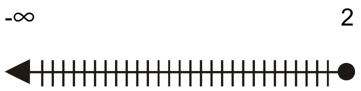
c) Representação Gráfica:

-5 2

Notação de Conjuntos: $\{ x \in \mathbf{R} / -5 < x \leq 2\}$

Notação de Intervalos: $]-5; 2]$

d) Representação Gráfica:



Notação de Conjuntos: $\{x \in \mathbf{R} / x \leq 2\}$

Notação de Intervalos: $]-\infty-; 2]$

e) Representação Gráfica:

Notação de Conjuntos: $\{ x \in \mathbf{R} / x > -5\}$

Notação de Intervalos: $]-5; +\infty[$

Observe:

Na notação de intervalos, o *colchete* que está do lado de $-\infty$ ou de $+\infty$ fica *sempre voltado para fora*

SISTEMAS DE MEDIDAS

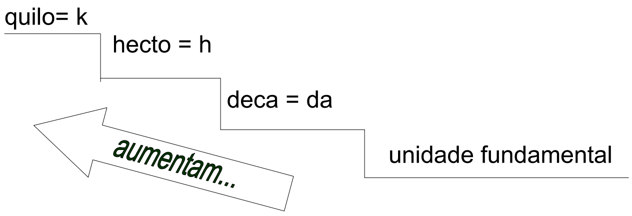
Medir uma grandeza significa compará-la com outra grandeza da mesma natureza, tomada como **unidade de medida**.
Para exemplificar, vejamos na tabela seguinte apenas as mais comuns entre as unidades decimais de medidas.

NATUREZA DA GRANDEZA	NOME DA UNIDADE FUNDAMENTAL DE MEDIDA	SÍMBOLO
comprimento	metro	m
superfície	metro quadrado	m^2
Volume (capacidade)	metro cúbico litro	M^3 λ
massa	grama	g

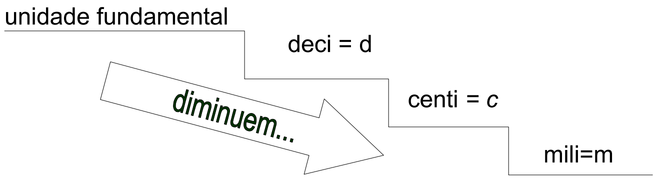
Atenção: os **símbolos** são sempre **invariáveis**. Portanto, não mudam para indicar plural, nem admitem outras formas de escrita.
Exemplos:
estão **certos**: 20m, 30 λ, 16 g
estão **errados**: 20mts, 301lts, l6 grs

Múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais de medidas decimais

Para tornar mais cômodas as Expressões de valores muito grandes ou muito pequenos em relação ao valor da unidade fundamental de uma grandeza, podemos indicar o valor da grandeza medida utilizando um múltiplo ou um submúltiplo da unidade fundamental.
Os múltiplos de uma unidade de medida decimal podem ser 10, 100, 1000, etc. vezes **maiores** que a unidade fundamental.
Cada múltiplo da unidade fundamental é identificado por um prefixo e um símbolo correspondente que são justapostos ao nome e ao símbolo da unidade fundamental, respectivamente.



Os submúltiplos de uma unidade de medida decimal podem ser 10, 100, 1.000, etc. vezes menores que a unidade fundamental.
Cada submúltiplo da unidade fundamental é identificado por um prefixo e um símbolo correspondentes que são justapostos ao nome e ao símbolo da unidade fundamental, respectivamente.



I. Medidas de comprimento

A unidade fundamental das medidas de comprimento e o **metro**.
Os múltiplos do metro sao:

decâmetro (dam)	hectômetro (hm)	quilômetro (km)
1dam= 10m	1 hm =100m	1km = l 000m

Os submúltiplos do metro são:

decímetro (dm)   centímetro (cm)   milímetro (mm)
1dm=0,1m   1cm=0,01m   1mm=0,001m

Conversão entre unidades de comprimento

Comparando os múltiplos e submúltiplos do metro, verificamos que cada um deles e 10 vezes maior ou 10 vezes menor que as unidades imediatamente vizinhas a eles.

Exemplo:

1 km = 10hm = 100dam = 1.000m = ...
e
1mm =0,1cm=0,01 dm=0,001m=...

Assim sendo, se quisermos trocar a unidade em que uma medida de comprimento está representada por qualquer outra, poderemos usar a seguinte regra prática:

A vírgula **sempre** se desloca para o lado da **menor** das duas unidades consideradas, sendo **uma casa** para cada vez que mudarmos do nome de uma unidade para o nome da unidade vizinha.

Exemplos:

1 °) Converter 6,78dm para milímetros. Para usar a regra prática, precisamos montar uma igualdade que começará **sempre** pela unidade dada e terminará **sempre** pela unidade desejada:

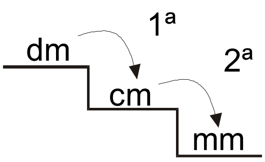
6,78dm = ...? mm

A unidade **menor** (mm) está a **direita**.

Então, a vírgula será deslocada para a **direita**:

6,78dm = 6 78   mm
,

Ao descer a "escada" dos submúltiplos indo de decímetros para milímetros mudamos de unidade duas vezes:



Assim sendo, o deslocamento da vírgula para a direita será de duas casas:

6,78dm=6 78,mm

2 casas

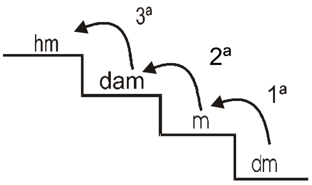
Ou seja, 6,78dm representam o mesmo que 678mm.

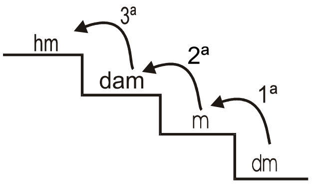
2°) Converter 65.300dm para hectômetros.

65.300dm = 65 300 hm
,

A menor unidade (dm) esta à **esquerda**. Então, a vírgula será deslocada para a **esquerda**.

Dos **decímetros** para os **hectômetros**, na "escada" dos múltiplos e submúltiplos, mudamos de unidade 3 vezes:





Assim, o deslocamento da vírgula para a esquerda será de três casas:

65.300dm = 65,300hm

Ou seja: 65.300dm representam o mesmo que 65,3hm.

Atenção:

Para efetuar qualquer operação entre medidas de uma mesma grandeza, devemos ter todas as medidas numa mesma unidade.

Exemplo:

Qual é o perímetro, em metros, de um terreno retangular que tem 0,75hm de comprimento por 305dm de largura?

Solução:

0,75hm = 75m (comprimento)
305dm = 30,5m (largura)
perímetro (soma das medidas dos lados):

per= 75m + 30,5m + 75m + 30,5m = 211m
Portanto, o perímetro do terreno e de 211m.

II. Medidas de massa

A unidade fundamental das medidas de massa é o **grama** (g). Nos enunciados das questões de provas de concursos é bastante comum encontrarmos o use incorreto da palavra **peso** como sinônimo de **massa**.
Os múltiplo do grama são:

decagrama (dag)	hectograma (hg)	quilograma (kg)
1dag=10g	1hg=100g	1kg=1.000g

Os submúltiplos do grama são:

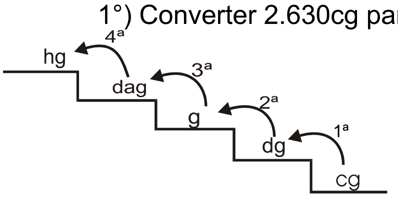
decigrama (dg)	centigrama (cg)	miligrama (mg)
1dg=0,1g	1cg=0,01g	1mg=0,001g

Conversão entre unidades de massa

As conversões entre duas unidades quaisquer de massa são feitas do mesmo modo que as conversões entre unidades de comprimento que vimos anteriormente.

Exemplos:

1°) Converter 2.630cg para hg.



2.630cg = 0, 2630 hg = 0,263hg

4 casas

III. Medidas de volume

Freqüentemente, o **metro cúbico** e apresentado como unidade fundamental das medidas de **volume**, apontando-se o litro como unidade fundamental das medidas de **capacidade**. A diferença e feita por motivos meramente didáticos, uma vez que as transformações entre os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico tem comportamento bem diverso das transformações entre os múltiplos e submúltiplos do litro, como veremos adiante. Alem disso, 1metro cúbico e 1000 vezes maior que 1 litro. Entretanto, volume e capacidade indicam grandezas de mesma natureza e devem ser entendidas como palavras sinônimas.

O litro

Os múltiplos e submúltiplos do litro são:

decalitro ($da\lambda$)
1 $da\lambda$ =10 λ

hectolitro ($h\lambda$)
1 $h\lambda$ =100 λ

quilolitro ($k\lambda$)
1 $k\lambda$ =1.000 λ

decilitro ($d\lambda$)
1 $d\lambda$ =0,1 λ

centilitro ($c\lambda$)
1 $c\lambda$ =0,01 λ

mililitro ($m\lambda$)
1 $m\lambda$ =0,001 λ

Observe que cada múltiplo ou submúltiplo do litro é 10 vezes maior ou 10 vezes menor que aqueles imediatamente vizinhos a ele. Assim, para converter uma medida de volume de um múltiplo ou submúltiplo qualquer do litro para outro, podemos aplicar a mesma regra prática que vimos para a conversão entre medidas de comprimento.

O metro cúbico

Os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico são:

decâmetro cúbico (dam^3)
1dam^3= 1.000m^3

hectômetro cúbico (hm^3)
1hm^3 = 1.000.000m^3

quilômetro (km^3)
1 k m^3= 1.000.000.000m^3

(Cada múltiplo e 1.000 vezes maior que o anterior.)

decímetro cúbico (dm^3)
1dm^3=0,001 m^3

centímetro cúbico (cm^3)
1 cm^3= 0,000.001 m^3

milímetro cúbico (mm^3)
1 mm^3= 0,000.000.001 m^3

(Cada submúltiplo é 1.000 vezes menor que o anterior.)

Conversão entre múltiplos e submúltiplos do metro cúbico

Como cada múltiplo ou submúltiplo do metro cúbico e 1.000 vezes maior ou 1.000 vezes menor que aqueles imediatamente vizinhos a ele, poderemos usar a seguinte regra prática para as conversões.

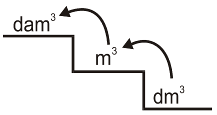
A vírgula sempre se desloca para o lado da **menor** das duas unidades consideradas, sendo **três casas** para cada vez que mudarmos do nome de uma unidade para o nome da unidade vizinha.

Exemplos:

1°) Converter 68.320dm^3 para decâmetros cúbicos.

Solução:

De decímetros cúbicos para decâmetros cúbicos mudamos de unidade duas vezes:



Os expoentes nos lembram que devemos deslocar a vírgula 3 casas para cada 'degrau':
(2 degraus) x (3 casas)= 6 casas

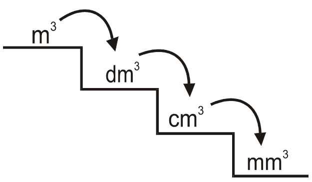
68.320dm^3 = 0,068.320 $darn^3$ = 0,06832dam^3

6 casas

2º) converter 0,00032m^3 para milímetros cúbicos.

Solução:

De metros cúbicos para milímetros cúbicos descemos três "degraus":



(3 degraus) x (3 casas) = 9 casas

0,00032m^3 = 0.000.320.000,mm^3 = 320.000mm3

9 casas

Obs.: As casas que faltaram para 9 foram completadas com zeros enquanto os zeros que sobraram à esquerda do número, antes da vírgula, foram eliminados.

IV. Medidas de superfície

A unidade fundamental das medidas de superfície é o **metro quadrado**.

Os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado são:

múltiplos	decâmetro quadrado:	1 dam^2 = 100 m^2
	hectômetro quadrado:	1 hm^2 = 10.000 m^2
	quilômetro quadrado:	1 km^2 = 1.000.000 m^2

submúltiplos	decímetro quadrado:	1 dm^2= 0,01 m^2
	centímetro quadrado:	1 cm^2 = 0,000.1 m^2
	milímetro quadrado:	1 mm^2=0,000.001 m^2

Cada múltiplo ou submúltiplo do metro quadrado é 100 vezes maior ou 100 vezes menor que aqueles imediatamente vizinhos a ele.

Regra prática para transformações:

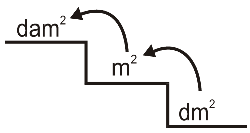
A virgula sempre se desloca para o lado da menor unidade, sendo **duas casas** para cada "degrau".

Exemplos:

1^0) Converter 23.450 dm^2 para decâmetros quadrados.

Solução:

De dm^2 para dam^2 mudamos de unidade duas vezes:



Os expoentes nos lembram que devemos deslocar a vírgula 2 casas para cada degrau:
(2 degraus) x (2 casas) = 4 casas

23.450 dm^2 = 2,3450 dam^2 = 2,345 dam^2

4 casas

2°) Converter 0,32 km^2 em metros quadrados
.
Solução:

De km^2 para m^2 são 3 "degraus".

(3 degraus) x (2 casas) = 6 casas

0,32 km^2 = 0 320000, m^2= 320.000 m^2

6 casas

Foi preciso acrescentar mais quatro "zeros" para completar as seis casas necessárias.

CORRESPONDÊNCIAS ENTRE UNIDADES DE MEDIDAS

I. Unidades de volume

Freqüentemente, são exploradas nas questões de concursos as seguintes equivalências entre unidades de volumes:

1 m^3 = 1 $k\lambda$ 1 dm^3= 1 λ 1 cm^3 = 1 $m\lambda$

Atenção:

Como as equivalências acima mostram correspondência de 1 para 1 entre unidades de mesma natureza (volumes), as grandezas equivalentes deverão, nestes três casos, ser usadas como **sinônimas**. Portanto, dizer 32 dm^3 e rigorosamente o mesmo que dizer 32λ; dizer $470\,m\lambda$ e exatamente o mesmo que dizer 470 cm^3; $2\,k\lambda$ e o mesmo que 2 m^3.

Exemplo:

Um reservatório tem o formato de paralelepípedo e suas dimensões são 2m, por 3m por 5m. Determine a capacidade deste reservatório em litros.

Solução:

Se transformarmos as três dimensões dadas para decímetros, obteremos o volume diretamente em decímetros cúbicos (e sabemos que $dm^3 = \lambda$):

$$\left.\begin{array}{l} 2m = 20\ dm \\ 3m = 30\ dm \\ 5m = 50\ dm \end{array}\right\} \text{Volume} = 20x3Ox5O = 30.000\ dm^3$$

Portanto, a capacidade do reservatório e de $30.000\,\lambda$.

II. Unidades de volume e de massa

Quando se propõe alguma correspondência entre a massa de uma substância e o seu volume, admite-se que elas são diretamente proporcionais entre si.

Sendo assim, diremos que:

Se 10m^3 de uma substância pesam 4.000 kg, então, 5m^3 da mesma substância pesarão 2.000 kg e 20m^3 da mesma substância pesarão 8.000 kg.

A **razão** constante entre a **massa** e o **volume** correspondente de uma substância é chamada **densidade** da substância.

$$\boxed{\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}}$$

Exemplo:

Para determinarmos qual e a densidade da substância discutida linhas acima, basta calcular a razão entre a massa e o volume correspondente:

$$\text{densidade} = \frac{4.000kg}{10m^3} = 400kg\,/\,m^3$$

III. O caso especial da água

Para a água pura e sob condições especiais de temperatura e pressão (temperatura de 4°C e pressão de 1 atmosfera), vale a seguinte correspondência:

1 litro de agua pesa **1 kg**

Esta correspondência também e a base de muitas questões de concursos públicos, embora as condições necessárias de temperatura e pressão raramente sejam lembradas.

Exemplo:

Um aquário tem o formato de um paralelepípedo e suas dimensões são 60 cm de largura, 40 cm de altura e 30 cm de comprimento. Quantos quilogramas o aquário pesara depois que estiver cheio d'água se, vazio, ele pesa 3 kg?

solução:

Como cada kg de água corresponde a 1 λ, devemos determinar a capacidade do aquário em litros:

$$\left.\begin{array}{l} 60cm = 6dm \\ 40cm = 4dm \\ 30cm = 3dm \end{array}\right\} \quad \text{volume} = 6x4x3 = 72dm^3 = 72\,\lambda$$

72l de água pesam 72 kg .

Portanto, o peso do aquário mais a água nele contida é:

$3\,kg + 72\,kg = 75\,kg$

IV. Medidas não-decimais

Medidas de tempo

De maneira geral, os múltiplos e submúltiplos das medidas de tempo não se relacionam por fatores de 10, 100, 1.000, etc.
Cada uma das medidas de tempo relaciona-se com as outras por fatores que dependem da medida considerada, conforme veremos:

1 segundo (1s) = subdivide-se em décimos, centésimos, etc.
1 minuto (1 min) = 60 s
1 hora (1 h) = 60 min
1 dia=24h
1 semana = 7 dias
1 mês = 30 dias (mês comercial)
1 ano = 12 meses = 360 dias (ano comercial)

Outras unidades de tempo freqüentemente utilizadas são:
1 quinzena = 15 dias
1 decêndio = 10 dias
1 bimestre = 2 meses
1 trimestre = 3 meses
1 quadrimestre = 4 meses
1 semestre = 6 meses
1 biênio = 2 anos
1 triênio = 3 anos
1 qüinqüênio = 5 anos
1 década = 10 anos
1 século = 100 anos
1 milênio = 1000 anos

Medidas de ângulo

Existem três sistemas de medidas para ângulos. As unidades fundamentais de cada um destas três sistemas são o **grau** (°), o **grado** (gr) e o **radiano** (rd).
Pode-se encontrar a equivalência entre duas quaisquer destas três medidas, sabendo-se que:

$180° = 200\,gr = \pi$ rd (onde $\pi = 3{,}14$)

O sistema de medida de ângulos em graus é o único dos três a caracterizar-se como sistema **sexagesimal**. Isto significa que a relação de grandeza entre as unidades deste sistema dá-se por um fator igual a 60.

- Cada grau vale 60 minutos: $1° = 60'$
- Cada minuto vale 60 segundos: $1' = 60''$

Conversão entre unidades de medidas não-decimais

Para converter uma unidade de medida não decimal em outra, é preciso observar quantas vezes a unidade menor cabe dentro da maior.

Exemplos:

1) Quantos minutos ha em 1 dia?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{d} = 24\text{h}\\ 1\text{ h} = 60\text{min}\end{array}\right\}\ 1\text{d} = 24\text{h} = 24\text{x}(60\text{min}) = 1.440\text{min}$$

2) Quantos segundos ha em 3 dias?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{d}=24\text{h}\\ 1\text{ h} = 60\text{min}\\ 1\text{min}=60\text{s}\end{array}\right\}\ 3\text{d} = 3\text{x}24\text{x}60\text{x}60\text{s} = 259.200\text{s}$$

3) Quantos minutos mede um ângulo de 4°?

Solução:
$1° = 60' \Rightarrow 4° = 4\text{x}60' = 240'$

4) Quantos segundos mede um ângulo de 3°?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l}1°\ 60'\\ 1' = 60''\end{array}\right\}\ 3° = 3 \times 60 \times 60'' = 10.800''$$

5) Quantos segundos há em 5h 40min?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l}5\text{h}=5\text{x}60\text{min}=5\text{ x}60\text{x}60\text{s}=18.000\text{s}\\ 40\text{min} = 40 \times 60\text{s} = 2.400\text{s}\end{array}\right\}$$

5h 40min = 18.000 + 2.400 = 20.400s

6) Quantas horas e minutos ha em $\frac{1}{10}$ de um dia?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1\text{dia}}{10} = \frac{24\text{h}}{10} = 2\text{h} + \frac{4\text{h}}{10}\\ \frac{4\text{h}}{10} = \frac{4\text{x}60\text{min}}{10} = \frac{240\text{min}}{10} = 24\text{min}\end{array}\right\} \frac{1\text{dia}}{10} = 2\text{h}24\text{min}$$

Portanto, $\frac{1}{10}$ de um dia é igual a 2h 24min.

7) Quantas horas, minutos e segundos há em $\frac{1}{100}$ de um dia?

$$\frac{1\text{dia}}{100} = \frac{24\text{h}}{100} \text{ x } \frac{24 \text{ x } 60\text{min}}{100} = \frac{1.440\text{min}}{100} = 14\text{min} + \frac{40\text{min}}{100}$$

$$\frac{40\text{min}}{100} = \frac{40 \text{ x } 60\text{s}}{100} = \frac{2.400\text{s}}{100} = 24\text{s}$$

Portanto, $\frac{1}{100}$ de um dia é igual a 14min 24s.

EXERCÍCIOS - SISTEMAS DE MEDIDAS

I. Medidas de comprimento

1. Transformar para metros:
a) 6,12km
b) 6,4dm
c) 0,52hm
d) 8.200cm

2. Transformar para centímetros:
a) 1,3m
b) 42,7dm
c) 28mm
d) 1,036dam

3. Um retângulo tem 30 cm de largura por 0,5m de comprimento. Calcule, em decímetros, o perímetro deste retângulo.

4. O perímetro de um quadrado e igual a 0,48m. Determine, em centímetros a medida de cada lado deste quadrado.

5. Calcule, em metros, o perímetro de um terreno retangular de 3 dam de frente (largura) por 400dm de fundos (comprimento).

6. Um terreno retangular tem 720dm de perímetro. Calcule suas dimensões, em metros, sabendo que uma delas e o dobro da outra.

7. As dimensões de um terreno retangular estão entre si assim como 3 está para 4. Determine a maior delas, em metros, sabendo que o perímetro do terreno é igual a 0,98hm.

8. Um terreno retangular tem 0,2km de perímetro. Sabendo que ele é 300 dm mais comprido que largo, calcule qual é a largura deste terreno, em metros.

9. No ar seco, o som percorre 340m por segundo. Nestas condições, quantos quilômetros o som percorreria em 1 hora?

10. Um terreno retangular com 50m de frente por 0,4hm de fundos deve ser cercado com 3 voltas de fio. Quantos metros de fio serão necessários?

11. A iluminação de uma auto-pista é feita por lâmpadas que estão em postes colocados a cada 30m, todos do mesmo lado da pista. Se o primeiro e o último postes ficam afastados exatamente 15km, quantos postes fazem a iluminação delta pista'?

12. A placa que anuncia o nome de certa loja tem 3m de largura por 2m de comprimento e é cercada de pequenas lâmpadas que são colocadas a cada 10cm umas das outras, ao longo de cada lado, ficando uma lâmpada em cada canto da placa. Deste modo, quantas lâmpadas ao todo são empregadas?

13. Um terreno retangular com 96m de perímetro será cercado com estacas de 1Ocm de largura, deixando sempre entre elas um vão livre de 4dm. Quantas estacas ao todo serão necessárias?

14. Uma fábrica comprou 1.500m de tecido R$ 2.700,00. Após o tingimento e secagem, constatou-se que
a peça original tinha encolhido de $\frac{1}{10}$. Nestas condições, de quanto foi o custo real (apos o encolhimento) do metro de tecido?

15. Um comerciante desonesto vendeu 48m de tecido como se fossem 50m, pois usou um "metro" mais curto. Quantos centímetros tinha, realmente, o "metro" deste comerciante?

II. Medidas de área

1. Transformar para metros quadrados:
a) 0,03km^2
b) 0,58hm^2
c) 6,4dam^2

2. Transformar para decâmetros quadrados:
a) 580m^2
b) 68.000dm^2
c) 53.700cm^2

3. Transformar para centímetros quadrados:
a) 0,06m^2
b) 53dm^2
c) 480mm^2

4. Um quadrado tem 20dm de lado. Qual é a sua área, em metros quadrados?

5. Um quadrado tem 2.400cm de perímetro. Qual é a área deste quadrado, em metros quadrados?

6.A área de um quadrado e igual a 1,44m^2. Quantos centímetros mede cada um de seus lados?

7.A área de um terreno quadrado e de 6.400dm^2. Quantos metros de tela serão necessários para cercar este terreno, se quisermos deixar apenas uma abertura de 3m para o portão de entrada?

8. As dimens6es de um terreno retangular estão na proporção de 3 para 5. Determine o tamanho do lado maior deste terreno, sabendo que sua área e de 240m^2.

9. Um terreno retangular com 750m^2 de área tem os seus lados na proporção de 5 para 6. Quantos metros de fio de arame serão gastos para cerca-lo com 4 voltas de fio?

10. Determine a medida do menor lado de um retângulo, sabendo que suas dimensões estão entre si assim como 2 para 3 e que a diferença entre o número que expressa a sua área, em metros quadrados, e o número que expressa o seu perímetro, em metros, e igual a 24.

11. Ao medir uma sala, encontrei 10 passos mais 2 pés de comprimento e 6 passos mais 1 pé de largura. Considerando que o comprimento do meu passo e de 40 cm e o de meu pé, 20cm. Quantos metros quadrados
tem esta sala?

12. Um terreno de 200m^2 foi dividido em dual partes. A quarta parte da primeira e igual em área a sexta parte da segunda. Quantos metros quadrados tem a primeira parte?

III. Medidas de volume

1. Transformar para metros cúbicos:
a) 7.500dm^3
b) 0,002hm^3
c) 35.800.000cm^3

2.Transformar para litros:
a) 13,52hl
b) 32.000cl
c) 5,72dl

3.Transformar para a unidade pedida:
a) 23,5m^3 para kl
b) 4,3 dm^3 para l
c) 58,6cm^3 para ml
d) 16,7m^3 para dal
e) 2,85dl para cm^3
f) 32,7hl para dm

g)0,6dam^3 para kl
h) 3.200mm^3 para dl

4.Uma caixa d'água de formato cúbico tem 0,60m de aresta. Qual e o volume, em litros, que ela 2 conterá se estiver cheia até $\frac{2}{3}$ de sua capacidade total'?

5.As dimensões internas de uma geladeira são de 6dm de largura, 50cm de profundidade e 0,8m de altura. Determine, em litros, a capacidade total desta geladeira.

6.Vinte e quatro metros cúbicos de certo produto devem ser acondicionados em frascos de 800ml. Quantos frascos serão necessários?

7.Um tanque tem formato de paralelepípedo e suas dimensões são diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 4. Determine a capacidade, em decalitros, deste tanque, sabendo que a maior de suas dimensões supera a menor em 0,04hm.

8.Calcule, em hectolitros, a capacidade de um reservatório com formato de paralelepípedo cujo comprimento é o triplo da largura e esta, o dobro da altura, sabendo que a soma das três dimensões é igual a 18m.

9.A capacidade total de dois reservatórios juntos é de 20hl. O primeiro contém água até $\frac{3}{4}$ de sua capacida-de e o segundo, até a metade. Se colocamos a água do primeiro no segundo, este ficará cheio. Qual é a capacidade total do segundo, em metros cúbicos?

10. Na construção de uma piscina cavou-se um fosso que mede 50m de comprimento, por 12m de largura, por 2m de profundidade. Quantas viagens, ao todo, devem dar 5 caminhões para transportar a terra retirada, se esta aumenta de $\frac{1}{5}$ o seu volume ao ser revolvida e cada caminhão leva somente 12m^3 em cada viagem?

IV. Medidas de massa

1.Transformar para decigramas:
a) 0,03kg
b) 3.200mg
c) 5,2hg
d) 200cg

2. Se um litro de óleo pesa 920g, qual o volume ocupado por 1.840kg deste óleo em litros?

3. Quantos metros cúbicos correspondem a uma massa de 3.000kg de água?

4. Um quilograma de água ocupa o mesmo volume que 400g de certo sorvete. Quantos quilogramas deste sorvete poderão ser acomodados num pote que tem capacidade para 5 litros?

5.Um vaso cheio de um determinado liquido pesa 1kg a mais do que se estivesse cheio de água. Sabe-se que 1dal desse líquido pesa 12kg. Quantos quilogramas desse líquido o vaso pode comportar?

6.A massa de certo volume de tinta é de 6kg. Se substituirmos metade do volume desta tinta por água, a massa da mistura será de 5kg. Quanto pesa cada litro desta tinta?

7. Sabe-se que 1 litro de tinta pura pesa 1.200g. Numa mistura de tinta e água, cada litro pesa 1.120g. Qual é a razão entre a **massa** de água e a de tinta, nesta ordem, que estão presentes na mistura?

V. Medidas não-decimais

1. Transforme para horas, minutos e segundos:
a) 5,125h
b) 3,6h
c) 14,3min

d) 190,8min
e) 5684s
f) 3400s

2. Quantos minutos há em $\frac{3}{4}$ de uma hora?

3.Quantas horas há em $\frac{3}{4}$ de um dia?

4.Que fração da hora corresponde a 5 minutos?

5. Que fração do dia corresponde a 6 horas?

6. Uma emissora de televisão põe 2 min de intervalo comercial para cada 20 min de filme, precisamente. Sabendo que um filme com duração original de 2 horas será apresentado por esta emissora a partir das 19h de certo dia, a que horas o filme devera terminar?

GABARITO

I. Medidas de comprimento

1. a) 6.120m
b) 0,64m
c) 52m
d) 82m

2. a) 130cm
b) 427cm
c) 2,8cm
d) 1.036cm

3. 16dm
4. 12cm
5. 140m
6. 12m e 24m
7. 28m
8. 35m
9. 1.224km/h
10. 540m
11. 501 postes
12. 100 lâmpadas
13. 192 estacas
14. R$2,00
15. 96 cm

II. Medidas de área

1. a) 30.000m^2
b) 5.800m^2
c) 640m^2

2. a) 5,8dam^2
b) 6,8dam^2
c) 0,0537dam^2

3. a) 600cm^2
b) 5.300cm^2
c) 4,8cm^2

4. 4m^2
5. 36m^2
6. 120cm
7. 29m
8. 20m
9. 440m
10. 6m
11. 11,44m
12. 80m^2

III. Medidas de volume

1. a) $7{,}5m^3$
b) $2.000m^3$
c) $35{,}8m^3$

2. a) 1.352λ
b) 320λ
c) 0,572λ

3. a) 23,5kλ
b) 4,3λ
c) 58,6mλ
d) 1.670daλ
e) $285cm^3$
f) $3.270dm^3$
g) 600kλ
h) 0,032dλ

4. 144λ
5. 240λ
6. 30.000 frascos
7. 19.200daλ
8. 960hλ
9. $1{,}2m^3$
10. 120 viagens

IV. Medidas de massa

1. a) 300dg
b) 32dg
c) 5.200dg
d) 20dg

2. 2000λ
3. $3m^3$
4. 2kg
5. 6kg
6. 1,5kg
7. 5/9

V. Medidas não-decimais

1. a) 5h 7min 30s
b) 3h 36min
c) 14h 18s
d) 3h 10min 48s
e) 1 h 34min 44s
f) 56min 40s

2. 45min
3. 18h
4. 1/12 de uma hora
5. 1/4 de um dia
6. 21h 10min

RAZÕES E PROPORÇÕES

Chama-se razão de dois números, dados numa certa ordem e sendo o segundo diferente de zero, ao quociente do primeiro pelo segundo.
Assim, a razão entre os números a e b pode ser dita "razão de a para b" e representada como:

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a:b$$

Onde a é chamado **antecedente** enquanto b é chamado **conseqüente** da razão dada.

Ao representar uma razão freqüentemente simplificamos os seus termos procurando, sempre que possível, torná-los inteiros.

Exemplos:
A razão entre 0,25 e 2 é:

$$\frac{0{,}25}{2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(1 \text{ para } 8)$$

$$\text{A razão entre } \frac{1}{6} \text{ e } \frac{5}{12} \text{ é}: \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{5}{12}\right)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{2}{5}(2 \text{ para } 5)$$

$$\text{A razão } 6 \text{ e } \frac{1}{5} \text{ é}: \frac{6}{\left(\frac{1}{5}\right)} = 6 \cdot \frac{5}{1} = \frac{30}{1}(30 \text{ para } 1)$$

Proporção é a expressão que indica uma igualdade entre duas ou mais razões.

A proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ pode ser lida como "a está para b assim como c está para d' e representada como a: b: c: d.
Nesta proporção, os números a e d são os extremos e os números b e c são os **meios**.

Em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Quarta proporcional de três números dados a, b e c nesta ordem, é o número x que completa com os outros três uma proporção tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Exemplo:

Determinar a quarta proporcional dos números 3 , 4 e 6 nesta ordem.

Solução:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{x} \rightarrow 3x = 4 \text{ x } 6 \rightarrow x = 8$$

Proporção contínua é aquela que tem **meios iguais.**

Exemplo:
A proporção 9 : **6** : : **6** : 4 é contínua pois tem os seus meios iguais a **6**.

Numa proporção contínua temos:

- O valor comum dos meios é chamado **média proporcional** (ou **média geométrica**) dos extremos. Ex.: 4 é a média proporcional entre 2 e 8, pois 2:**4**::**4**:8
- O último termo é chamado **terceira proporcional**. Ex.: 5 é a terceira proporcional dos números 20 e 10, pois
  20:10::10:**5**

Proporção múltipla é a igualdade simultânea de três ou mais razões.

Exemplo:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

Razões inversas são duas razões cujo produto é igual a **1**.

Exemplo:

$\frac{3}{5} \text{x} \frac{10}{6} = 1$ então dizemos que "3 está para 5 na **razão inversa** de 10 para 6" ou então que "3/5 está na razão inversa de 10/6" ou ainda que "3/5 e 10/6 são razões inversas".

Quando duas razões são inversas, qualquer uma delas forma uma proporção com o inverso da outra.

Exemplo:
3/5 e 10/6 são razões inversas. Então, 3/5 faz proporção com 6/10 (que é o inverso de 10/6) enquanto 10/6 faz proporção com 5/3 (que é o inverso de 3/5).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Numa prova com 50 questões, acertei 35, deixei 5 em branco e errei as demais.
Qual é a razão do número de questões certas para o de erradas?

Resolução:
Das 50 questões, 35 estavam certas e 5 ficaram em branco. Logo, o número de questões erradas é:

50-35-5= 10

Assim, a razão do número de questões certas (35) para o de erradas (10) é $\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$ ou 7 para 2.

2. Calcular dois números positivos na proporção de 2 para 5 sabendo que a diferença do maior para o menor é 42.

Resolução:
Sejam x o menor e y o maior dos números procurados.
A proporção nos mostra que x está para 2 assim como y está para 5.
Então, podemos dizer que:
x tem 2 partes .... (x = 2p)
enquanto y tem 5 partes .... (y = 5p)

Mas como a diferença y -x deve valer 42, teremos:

$$\underbrace{5p}_{y} - \underbrace{2p}_{x} = 42 \to 3p = 42 \to p = \frac{42}{3} \to p = 14$$

Agora que descobrimos que cada parte vale 14 (p = 14), podemos concluir que:

o valor de x é $\to$ $x = 2p = 2 \cdot (14) = 28$
o valor de y é $\to$ $y = 5p = 5 \cdot (14) = 70$

3. Na proporção múltipla $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$, determinar os valores de x, de y e de z sabendo que x + y + z = 112.

Resolução:
A proporção múltipla nos mostra que:

x tem 3 partes .... (x = 3p)
enquanto y tem 5 partes.......... (y = 5p)
e z tem 6 partes .... (z = 6p)

Como a soma das três partes vale 112, temos:

$3p+5p+6p = 112$
$14p = 112$
$p = 112 \div 14$
$p = 8$

Agora que descobrimos que cada parte vale 8, podemos concluir que:

o valor de x é → $x = 3p = 3 \cdot (8) = 24$
o valor de y é → $y = 5p = 5 \cdot (8) = 40$
o valor de z é → $z = 6p = 6 \cdot (8) = 48$

4. Sabendo que a está para b assim como 8 está para 5 e que 3a - 2b = 140, calcular a e b.

Resolução:
Pela proporção apresentada, a tem 8 partes enquanto b tem 5 partes:

$a=8p$ e $b=5p$

então teremos: $3a = 3 \times (8p) = 24p$ e

$2b = 2 \times (5p) = 10p$

portanto: $3a - 2b = 140 \rightarrow 24p - 10p = 140 \rightarrow 14p = 140 \rightarrow p = 10$

como p = 10 temos: $a = 8p = 8 \times 10 = 80$ e
$b = 5p = 5 \times 10 = 50$

5. Dois números positivos estão entre si assim como 3 está para 4. Determine-os sabendo que a soma dos seus quadrados é igual a 100.

Resolução:
Se os números estão entre si na proporção de 3 para 4, então um deles é 3p e o outro é 4p.

Deste modo, a soma dos quadrados fica sendo:

$(3p)^2 + (4p)^2 = 100$
$9p^2 + 16p^2 = 100$
$25p^2 = 100$
$p^2 = 4 \rightarrow p = 2$ (pois os números são positivos)

Portanto, os dois números são:

$3p=3\times2=6$
e
$4p=4\times2=8$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule a quarta proporcional dos números dados:
a) 2;5 e 10
b) 3;4 e 5
c) $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$

2. Calcule a terceira proporcional dos números dados:
a) 3 e 6
b) 4 e 12
c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$

3. Calcule a média proporcional entre os números dados:
a) 3 e 12
b) 6 e 24
c) $\frac{1}{2}$ e 128

4. Determine dois números na proporção de 3 para 5, sabendo que a soma deles é 48.

5. Determine dois números na proporção de 3 para 5, sabendo que o segundo supera o primeiro em 60 unidades.

6. A razão entre dois números é igual a 4/5. Determine-os sabendo que eles somam 72.

7. A razão entre dois números é igual a 4/5. Determine-os sabendo que o segundo supera o primeiro em 12 unidades.

8. Determine dois números na proporção de 2 para 7 sabendo que o dobro do primeiro mais o triplo do segundo resulta igual a 100.

9. Determine dois números na proporção de 2 para 7 sabendo que o quíntuplo do primeiro supera o segundo em 48 unidades.

10. Dois números positivos encontram-se na proporção de 11 para 13. Determine-os sabendo que a soma de seus quadrados resulta igual a 29.000.

11. Dois números negativos encontram-se na proporção de 7 para 3. Determine-os sabendo que o quadrado do primeiro supera o quadrado do segundo em 360.

12. Dois números inteiros encontram-se na proporção de 3 para 5. Determine-os sabendo que o produto deles é igual a 60.

13. Encontre os três números proporcionais a 5, 6 e 7, sabendo que a soma dos dois menores é igual a 132.

14. Encontre os três números proporcionais a 3, 4 e 5, tais que a diferença entre o maior deles e o menor é igual a 40.

15. Três números proporcionais a 5, 6 e 7 são tais que a diferença do maior para o menor supera em 7 unidades a diferença entre os dois maiores. Quais são estes números?

16. Três números são tais que o primeiro está para o segundo assim como 2 está para 5 enquanto a razão do terceiro para o primeiro é 7/2. Quais são estes números, se a soma dos dois menores é igual a 49?

17. Para usar certo tipo de tinta concentrada, é necessário diluí-la em água na proporção de 3 : 2 (proporção de tinta concentrada para água). Sabendo que oram comprados 9 litros dessa tinta concentrada, quantos litros de tinta serão obtidos após a diluição na proporção recomendada?

18. Três números são proporcionais a 2, 3 e 5 respectivamente. Sabendo que o quíntuplo do primeiro, mais o triplo do segundo, menos o dobro do terceiro resulta 18, quanto vale o maior deles?

19. Dois números estão entre si na razão inversa de 4 para 5. Determine-os sabendo que a soma deles é 36.

20. A diferença entre dois números é 22. Encontre estes números, sabendo que eles estão entre si na razão inversa de 5 para 7.

DIVISÃO PROPORCIONAL

Grandezas diretamente proporcionais

Dada a sucessão de valores (a_1, a_2, a_3, a_4, ...), dizemos que estes valores são **diretamente proporcionais** aos correspondentes valores da sucessão (b_1, b_2, b_3, b_4, ...) quando forem iguais as razões entre cada valor de uma das sucessões e o valor correspondente da outra.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots..$$

O resultado constante das razões obtidas de duas sucessões de números diretamente proporcionais é chamado de **fator de proporcionalidade.**

Exemplo:
Os valores 6, 7, 10 e 15, nesta ordem, são diretamente proporcionais aos valores 12, 14, 20 e 30 respectivamente, pois as razões $\frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{10}{20} \text{ e } \frac{15}{30}$ são todas iguais, sendo igual a $\frac{1}{2}$ o fator de proporcionalidade da primeira para a segunda.

Como se pode observar, as sucessões de números diretamente proporcionais formam **proporções múltiplas** (já vistas no capítulo de razões e proporções). Assim sendo, podemos aproveitar todas as técnicas estudadas no capítulo sobre proporções para resolver problemas que envolvam grandezas diretamente proporcionais.

Grandezas inversamente proporcionais

Dada a sucessão de valores (a_1, a_2, a_3, a_4, ...), todos diferentes de zero, dizemos que estes valores são inversamente proporcionais aos correspondentes valores da sucessão b_1, b_2, b_3, b_4, ...), todos também diferentes de zero, quando forem iguais os produtos entre cada valor de uma das sucessões e o valor correspondente da outra.

Exemplo:
Os valores 2, 3, 5 e 12 são inversamente proporcionais aos valores 30, 20, 12 e 5, nesta ordem, pois os produtos 2 x 30, 3 x 20, 5 x 12 e 12 x 5 são todos iguais.

Relação entre proporção inversa e proporção direta

Sejam duas sucessões de números, todos diferentes de zero. Se os números de uma são **inversamente proporcionais** aos números da outra, então os números de uma delas serão **diretamente proporcionais aos inversos** dos números da outra.
Esta relação nos permite trabalhar com sucessões de números inversamente proporcionais como se fossem diretamente proporcionais.

Divisão em portes proporcionais

1°caso: Divisão em partes diretamente proporcionais

Dividir um número N em partes diretamente proporcionais aos números *a, b,* c, ..., significa encontrar os números A, B, C, ..., tais que

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \ldots$$
$$A + B + C + \ldots = N$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dividir o número 72 em três partes diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 5.

Indicando por A, B, e C as partes procuradas, temos que:

A=3p, B=4p, C=5p e A+B+C=72

portanto: 3p + 4p + 5p = 72 $\rightarrow$ 12p = 72 $\rightarrow$ p = 6
valor de A $\rightarrow$ 3p = 3 x 6 = 18
valor de B $\rightarrow$ 4p = 4 x 6 = 24
valor de C $\rightarrow$ 5p = 5 x 6 = 30

Portanto, as três partes procuradas são 18, 24 e 30.

2. Dividir o número 46 em partes diretamente proporcionais aos números $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Reduzindo as frações ao mesmo denominador, teremos:

$$\frac{6}{12}, \frac{8}{12} \text{ e } \frac{9}{12}$$

Desprezar os denominadores (iguais) não afetará os resultados finais, pois a proporção será mantida e ainda simplificará nossos cálculos.

Então, poderemos dividir 46 em partes diretamente proporcionais a 6, 8 e 9 (os numeradores).

Indicando por A, B e C as três partes procuradas, teremos:

A=6p, B=8p, C=9p
A+B+C=46 $\rightarrow$ 6p+8p+9p = 46 $\rightarrow$ 23p = 46 $\rightarrow$ p=2

Assim, concluímos que: A = 6p = 6 x 2 = 12,
B = 8p = 8 x 2 = 16 e
C = 9p = 9 x 2 = 18

As partes procuradas são 12, 16e 18.

3. Dividir o número 45 em partes diretamente proporcionais aos números 200, 300 e 400.

Inicialmente dividiremos todos os números dados por 100. Isto não alterará a proporção com as partes procuradas, mas simplificará os nossos cálculos.

$(200, 300, 400) \div 100 = (2, 3, 4)$

Então poderemos dividir 45 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

Indicando as partes procuradas por:

$A = 2p,\ B = 3p \quad e \quad C= 4p$

$A+B+C=45 \rightarrow 2p+3p+4p=45 \rightarrow 9p = 45 \rightarrow p=5$

Assim, concluímos que: $A = 2p = 2 \times 5 = 10$,
$B = 3p = 3 \times 5 = 15$ e
$C = 4p = 4 \times 5 = 20$

2º caso: Divisão em partes inversamente proporcionais

Dividir um número N em partes inversamente proporcionais a números dados a, b, c,..., significa encontrar os números A, B, C, ... tais que

$a \times A = b \times B = c \times C =...$
e
$A+B+C+...= N$

4. Dividir 72 em partes inversamente proporcionais aos números 3, 4 e 12.
Usando a relação entre proporção inversa e proporção direta vista na página 70, podemos afirmar que as partes procuradas serão **diretamente** proporcionais a $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{12}$.
Reduzindo as frações ao mesmo denominador, teremos:

$\frac{4}{12}, \frac{3}{12}$ e $\frac{1}{12}$

Desprezar os denominadores (iguais) manterá as proporções e ainda simplificará nossos cálculos.

Então, poderemos dividir 72 em partes diretamente proporcionais a 4, 3 e 1 (numeradores).
Indicando por A, B e C as três partes procuradas, teremos:

$A = 4p, \quad B = 3p, \quad C = 1p$

$A + B + C = 72 \rightarrow 4p + 3p + 1p = 72 \rightarrow 8p = 72 \rightarrow P = 9$

Assim, concluímos que: $A = 4p = 4 \times 9 = 36$,
$B = 3p = 3 \times 9 = 27$ e
$C = 1p = 1 \times 9 = 9$.

Portanto, as partes procuradas são 36, 27 e 9.

3º caso: Divisão composta direta

Chamamos de divisão composta direta à divisão de um número em partes que devem ser diretamente proporcionais a duas ou mais sucessões de números dados, cada uma.

Para efetuarmos a divisão composta direta, devemos:
1º) encontrar uma nova sucessão onde cada valor será o produto dos valores correspondentes das sucessões dadas;

2°) efetuar a divisão do número em partes diretamente proporcionais aos valores da nova sucessão encontrada.

5. Dividir o número 270 em três partes que devem ser diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5 e também diretamente proporcionais aos números 4, 3 e 2, respectivamente.

Indicando por A, B e C as três partes procuradas, devemos ter:

A será ser proporcional a 2 e 4 $\rightarrow$ 2 x 4 = 8 $\rightarrow$ A = 8p
B será ser proporcional a 3 e 3 $\rightarrow$ 3 x 3 = 9 $\rightarrow$ B = 9p
C será ser proporcional a 5 e 2 $\rightarrow$ 5 x 2 = 10 $\rightarrow$ C= 10p

A+B+C=270 $\rightarrow$ 8p + 9p + 10p =270
27p = 270 $\rightarrow$ p = 10
A = 8p = 8 x 10 = 80
B = 9p = 9 x 10 = 90
C=10p = 10 x 10 = 100

Portanto, as três partes procuradas são: 80, 90 e 100.

4° caso: Divisão composta mista

Chamamos de divisão composta mista à divisão de um número em partes que devem ser diretamente proporcionais aos valores de uma sucessão dada e inversamente proporcionais aos valores de uma outra sucessão dada.

Para efetuarmos uma divisão composta mista, devemos

1°) inverter os valores da sucessão que indica proporção inversa, recaindo assim num caso de divisão composta direta;

2°) aplicar o procedimento explicado anteriormente para as divisões compostas diretas.

6. Dividir o número 690 em três partes que devem ser diretamente proporcionais aos números l, 2 e 3 e inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4, respectivamente.

Invertendo os valores da sucessão que indica proporção inversa, obtemos:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{4}$$

Reduzindo as frações a um denominador comum, teremos:

$$\frac{6}{12}, \frac{4}{12} \text{ e } \frac{3}{12} \rightarrow 6, 4 \text{ e } 3$$

Então, indicando por A, B e C as três partes procuradas, devemos ter:

A será proporcional a 1 e 6 $\rightarrow$ 1 x 6 = 6 $\rightarrow$ A = 6p
B será proporcional a 2 e 4 $\rightarrow$ 2 x 4 = 8 $\rightarrow$ 13=8p
C será proporcional a 3 e 3 $\rightarrow$ 3 x 3 = 9 $\rightarrow$ C = 9p

A + B +C = 690 $\rightarrow$ 6p + 8p + 9p =690
$\rightarrow$ 23p=690 $\rightarrow$ p=30
A =6p = 6 x 30 =180, B = 8p = 8 x 30 =240 e
C = 9p = 9 x 30 =270

Portanto, as três partes procuradas são: 180, 240 e 270.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine X, Y e Z de modo que as sucessões (15, X, Y, Z) e (3, 8, 10, 12) sejam diretamente proporcionais.

2. Determine X, Y e Z de modo que as sucessões (X, 32, Y, Z) e (3, 4, 7, 9) sejam diretamente proporcionais.

3. Determine X e Y de modo que as sucessões (20, X, Y) e (3, 4, 5) sejam inversamente proporcionais.

4. Determine X, Y e Z de modo que as sucessões (6, X, Y, Z) e (20, 12, 10, 6) sejam inversamente proporcionais.

5. Determine X e Y de modo que as sucessões (3, X, Y) e (4, 6, 12) sejam inversamente proporcionais.

6. Dividir 625 em partes diretamente proporcionais a 5, 7 e 13.

7. Dividir 1.200 em partes diretamente proporcionais a 26, 34 e 40.

8. Dividir 96 em partes diretamente proporcionais a $1{,}2\,;\,\frac{2}{5}$ e 8.

9. Dividir 21 em partes inversamente proporcionais a 3 e 4.

10. Dividir 444 em partes inversamente proporcionais a 4, 5 e 6.

11. Dividir 1.090 em partes inversamente proporcionais a $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ e $\frac{7}{8}$.

12. Dividir 108 em partes diretamente proporcionais a 2 e 3 e inversamente proporcionais a 5 e 6.

13. Dividir 560 em partes diretamente proporcionais a 3, 6 e 7 e inversamente proporcionais a 5, 4 e 2.

14. Repartir uma herança de R$ 460.000,00 entre três pessoas na razão direta do número de filhos de cada uma e na razão inversa das idades delas. As três pessoas têm, respectivamente, 2, 4 e 5 filhos e as idades respectivas são 24, 32 e 45 anos.

15. Dois irmãos repartiram uma herança em partes diretamente proporcionais às suas idades. Sabendo que cada um deles ganhou, respectivamente, R$ 3.800,00 e R$ 2.200,00, e que as suas idades somam 60 anos, qual é a idade de cada um deles?

REGRA DE TRÊS

Chamamos de **regras de três** ao processo de cálculo utilizado para resolver problemas que envolvam duas ou mais grandezas direta ou inversamente proporcionais.
Quando o problema envolve somente duas grandezas é costume denominá-lo de problema de **regra de três simples.**

Exemplos:
Se um bilhete de ingresso de cinema custa R$ 5,00, então, quanto custarão 6 bilhetes?
As grandezas são: **o número de bilhetes** e o **preço dos bilhetes**.

Um automóvel percorre 240 km em 3 horas. Quantos quilômetros ele percorrerá em 4 horas?
As grandezas são: **distância percorrida** e **tempo necessário**.

Poderemos chamar a regra de três simples de direta ou inversa, dependendo da relação existente entre as duas grandezas envolvidas no problema.

Quando o problema envolve mais de duas grandezas é costume denominá-lo de problema de **regra de três composta.**

Exemplo:
Se 5 homens trabalhando durante 6 dias constróem 300m de uma cerca, quantos homens serão necessários para construir mais 600rn desta cerca em 8 dias?
A grandezas são: **o número de homens**, a **duração do trabalho** e o **comprimento da parte construída**.

Para resolver um problema qualquer de regra de três devemos inicialmente determinar que tipo de relação de proporção existe entre a grandeza cujo valor pretendemos determinar e as demais grandezas.

Relação de proporção direto

Duas grandezas variáveis mantêm relação de proporção direta quando **aumentando** uma delas para **duas**, **três, quatro**, etc. vezes o seu valor, a outra **também aumenta** respectivamente para **duas, três, quatro**, etc. vezes o seu valor.

Exemplo:
Considere as duas grandezas variáveis:

(comprimento de um tecido)   (preço de venda da peça)

1 metro............. custa........................ R$ 10,00
2 metros ....custam ....R$ 20,00
3 metros .... custam..................... R$ 30,00
4 metros .... custam..................... R$ 40,00

Observamos que quando o comprimento do tecido tornou-se o **dobro**, o **triplo** etc., o preço de venda da peça também aumentou **na mesma proporção**. Portanto as grandezas "**comprimento do tecido**" e "**preço de venda da peça**" são **diretamente proporcionais**.

Relação de proporção inversa

Duas grandezas variáveis mantêm relação de proporção inversa quando **aumentando** uma delas para **duas, três, quatro**, etc. vezes o seu valor, a outra **diminuir respectivamente para metade, um terço, um quarto**, etc. do seu valor.

Exemplo:
Considere as duas grandezas variáveis:

Velocidade de um automóvel	Tempo de duração da viagem

A **20 km/**h .... a viagem dura .... **6 horas**
A 40 km/h........ a viagem dura .... 3 horas
A 60 km/h........ a viagem dura .... 2 horas

Observamos que quando a velocidade tornou-se o **dobro**, o **triplo** do que era, o tempo de duração da viagem tornou-se correspondentemente a **metade**, a **terça parte** do que era. Portanto, as grandezas "**velocidade**" e "**tempo de duração da viagem**" são **inversamente proporcionais**.

Cuidado!
Não basta que o **aumento** de uma das grandezas implique no **aumento** da outra. É preciso que exista proporção.

Por exemplo, **aumentando** o lado de um quadrado, a área do mesmo **também aumenta**. Mas **não há proporção**, pois ao **dobrarmos** o valor do lado, a área **não dobra** e sim **quadruplica!**

Grandezas proporcionais a várias outras

Uma grandeza variável é proporcional a várias outras se for diretamente ou inversamente proporcional a cada uma dessas outras, **quando as demais não variam**.

Exemplo:
O tempo necessário para construir certo trecho de uma ferrovia é diretamente proporcional ao comprimento do trecho considerado e inversamente proporcional ao número de operários que nele trabalham.

Observe:
1°) Vamos fixar o comprimento do trecho feito.
Em **30 dias, 10 operários** fazem 6 km.
Em **15 dias, 20 operários** também fazem 6 km.
Em **10 dias, 30 operários** também fazem 6 km.

Aqui, observa-se que o tempo é **inversamente proporcional** ao número de operários.

2°) Agora vamos fixar o número de operários.
30 operários, em **10 dias**, fazem **6 km.**
30 operários, em **20 dias**, farão **12 km**.
30 operários, em **30 dias**, farão **18 km**.

Agora, vemos que o tempo é **diretamente proporcional** ao comprimento do trecho feito.

PROPRIEDADE
Se uma grandeza for diretamente proporcional a algumas grandezas e inversamente proporcional a outras, então, a **razão** entre dois dos seus valores será igual:
ao produto das razões dos valores correspondentes das grandezas diretamente proporcionais a ela...
... multiplicado pelo produto das **razões inversas** dos valores correspondentes das grandezas inversamente proporcionais a ela.

Exemplo:
Vimos no exemplo anterior que o tempo necessário para construir certo trecho de uma ferrovia é **diretamente proporcional** ao comprimento do trecho considerado e **inversamente proporcional** ao número de operários que nele trabalham. Vimos também, entre outros, os seguintes valores correspondentes:

(Tempo necessário)	(Comprimento do trecho construído)	(Número de operários)
30 dias	6 km	10
20 dias	12 km	30

Aplicando a propriedade vista acima, teremos:

$$\frac{30}{20} = \frac{6}{12} x \frac{30}{10} \text{ (verifique a igualdade!)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Se 5 metros de certo tecido custam R$ 30,00, quanto custarão 33 metros do mesmo tecido?

Solução:

O problema envolve duas grandezas, **quantidade de tecido comprada e preço total da compra**. Podemos, então, montar a seguinte tabela com duas colunas, uma para cada grandeza:

Quant. de tecido (em metros)	Preço total (em R$)
5	30,00
33	**x**

Na coluna onde a incógnita **x** aparece, vamos colocar uma flecha:

Quant. de tecido (em metros)	Preço total (em R$)	
5	30,00	
33	**x**	↑

Note que a flecha foi apontada para o R$ 30,00 que é o **valor inicial do x** indicando que se a quantidade de tecido comprado não fosse alterada, o preço total da compra, **x**, continuaria sendo R$ 30,00.

Agora devemos avaliar o modo como a variação na quantidade de tecido afetará o preço total:

- Quanto **mais** tecido comprássemos, proporcionalmente **maior** seria o preço total da compra. Assim as grandezas **preço total** e **quantidade de tecido** são **diretamente proporcionais**.

Na tabela onde estamos representando as variações das grandezas, isto será indicado colocando-se uma flecha na coluna da quantidade de tecido no **mesmo sentido** da flecha do **x**.

	Quant. de tecido (em metros)	Preço total (em R$)	
	5	30,00	
↑	33	**x**	↑

A flecha do **x** indica que seu valor, inicialmente, era R$ 30,00:

inicialmente tinha-se **x** = 30

A outra flecha (a da quantidade de tecido) indica uma fração, apontando sempre do **numerador para o denominador.** Como neste exemplo a flecha aponta do 33 para o 5 a fração é $\frac{33}{5}$. Esta fração nos dá a variação causada em **x** (o preço) pela mudança da outra grandeza (a quantidade de tecido comprado).

Multiplicando o valor inicial de **x** por esta fração podemos armar a igualdade que nos dará o valor final de x:

$$x = 30x \frac{33}{5} \Rightarrow x = 198$$

Portanto, os 33 metros de tecido custarão R$ 198,00.

2. Em 180 dias 24 operários constroem uma casa. Quantos operários serão necessários para fazer uma casa igual em 120 dias?

Solução:

O problema envolve duas grandezas, **tempo de construção** e **número de operários necessários**. Montaremos, então uma tabela com duas colunas, uma para cada grandeza:

Tempo (em dias) N° de operários

180 24
120.................................. **x**

Na coluna onde a incógnita **x** aparece, vamos colocar uma flecha apontada para o **valor inicial do x** que é 24:

Tempo (em dias) N° de operários
180 24
120.................................. **x** ↑

Lembre-se que esta flecha está indicando que se o tempo de construção permanecesse o mesmo, o número de operários necessários, **x**, continuaria sendo 24.

Agora, devemos avaliar o modo como a variação no tempo de construção afetará o número de operários necessários:

- Quanto **menos** tempo houver para realizar a obra, proporcionalmente **maior** será o número de operários necessários. Assim as grandezas **tempo de construção** e **número de operários** são **inversamente proporcionais**.

Na tabela onde estamos representando as variações das grandezas, isto será indicado colocando-se uma flecha na coluna da quantidade de tecido no **sentido inverso** ao da flecha do **x**.

Tempo (em dias) .... N° de operários

180 24
↓ 120................................ x ↑

A flecha do **x** indica que seu valor, inicialmente, era 24:

inicialmente, tinha-se **x** = 24

Como no exercício anterior, a outra flecha indica uma fração que nos dá a variação causada em **x** (o número de operários) pela mudança da outra grandeza (o tempo) apontando sempre **do numerador para o denominador**. Como neste exemplo a flecha aponta do 180 para o 120 fração é $\frac{180}{120}$.

Multiplicando o valor inicial de **x** por esta fração, armamos a seguinte igualdade que nos dará o valor final de **x**:

$$x = 24x\frac{180}{120} \Rightarrow x = 36$$

Portanto, serão necessários 36 operários para fazer a casa em 120 dias.

3. Em 12 dias de trabalho, 16 costureiras fazem 960 calças. Em quantos dias 12 costureiras poderão fazer 600 calças iguais às primeiras?

Solução:

O problema envolve três grandezas, **tempo** necessário para fazer o trabalho, **número de costureiras** empregadas e **quantidade de calças** produzidas.
Podemos, então, montar uma tabela com três colunas, uma para cada grandeza:

Tempo (em dias)	N° de costureiras	Quantidade de calças
12	16	960
↑ **x**	12	600

Para orientar as flechas das outras duas grandezas é preciso compará-las **uma de cada vez** com a grandeza do **x** e de tal forma que, em cada comparação, consideraremos como se as demais grandezas permanecessem **constantes**.
- Quanto **menos** costureiras forem empregadas **maior** será o tempo necessário para fazer um mesmo serviço. Portanto, número de costureiras é **inversamente proporcional** ao tempo.
- Quanto **menor** a quantidade de calças a serem feitas **menor** também será o tempo necessário para produzi-las com uma mesma equipe. Portanto, a quantidade de calças produzidas e o tempo necessário para fazê-las são **diretamente proporcionais**.

Tempo N° de Quantidade

(em dias)	costureiras	de calças
12	16	960
↑ **x**	↓ 12	↑ 600

A flecha do **x**, como sempre, está indicando o seu valor inicial (**x** = 12).

As outras duas flechas indicam frações que nos dão as variações causadas em **x** (o tempo) pelas mudanças das outras grandezas (o número de costureiras e a quantidade de calças). Lembre-se de que elas apontam sempre **do numerador para o denominador.**

Multiplicando o valor inicial de **x** por estas frações, temos a igualdade que nos dará o valor final de **x**:

$$x = 12 \text{ x } \frac{16}{12} \text{ x } \frac{600}{900} \Rightarrow x = 10$$

Portanto, serão necessários 10 dias para fazer o serviço nas novas condições do problema.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Julgue os itens abaixo em **Certos** ou **Errados**.
( ) Dadas duas grandezas diretamente proporcionais, quando uma delas aumenta a outra também aumenta na mesma proporção.
( ) Dadas duas grandezas diretamente proporcionais, quando uma delas diminui a outra aumenta na mesma proporção.
( ) Dadas duas grandezas inversamente proporcionais, quando uma delas aumenta a outra diminui na mesma proporção.
( ) Dadas duas grandezas inversamente proporcionais, quando uma delas diminui a outra também diminui na mesma proporção.

2. Julgue os itens abaixo em **Certos** ou **Errados**.
( ) Se duas grandezas A e B são tais que ao duplicarmos o valor de A, o valor de B também duplica então A e B são grandezas diretamente proporcionais.
( ) Se duas grandezas A e B são tais que ao reduzirmos para um terço o valor de A, o valor de B também reduz-se para um terço, então A e B são grandezas inversamente proporcionais.
( ) Se duas grandezas A e B são tais que ao triplicarmos o valor de A, o valor de B fica reduzido para um terço do que era, então A e B são grandezas inversamente proporcionais.
( ) Se A é uma grandeza inversamente proporcional à grandeza B, então B é diretamente proporcional a A.
( ) Se duas grandezas A e B são tais que ao aumentarmos o valor de A em **x** unidades, o valor de B também aumenta em **x** unidades então A e B são grandezas diretamente proporcionais.

3. Determine, em cada caso, se a relação entre as grandezas é de proporção direta (D) ou inversa (I).
a) O número de máquinas funcionando e a quantidade de peças que elas produzem durante um mês. ( )
b) O número de operários trabalhando e o tempo que levam para construir uma estrada de 10 km. ( )
c) A velocidade de um ônibus e o tempo que ele leva para fazer uma viagem de Brasília a São Paulo.( )
d) A velocidade de um ônibus e a distância percorrida por ele em três horas. ( )
e) A quantidade de ração e o número de animais que podem ser alimentados com ela durante uma semana. ( )
f) O tamanho de um tanque e o tempo necessário para enchê-lo. ( )
g) O número de linhas por página e o total de páginas de um livro. ( )
h) A eficiência de um grupo de operários e o tempo necessário para executarem certo serviço. ( )
i) A dificuldade de uma tarefa e o tempo necessário para uma pessoa executá-la. ( )
j) A facilidade de uma tarefa e o tempo necessário para uma pessoa executá-la. ( )
k) O número de horas trabalhadas por dia e a quantidade de trabalho feito em uma semana. ( )
I) O número de horas trabalhadas por dia e o número de dias necessário para fazer certo trabalho. ( )

4. (CESPE/96-MPU-Assistente) É comum em nosso cotidiano surgirem situações-problema que envolvem relações entre grandezas. Por exemplo, ao se decidir a quantidade de tempero que deve ser usada na comida, a quantidade de pó necessária para o café, a velocidade com que se deve caminhar ao atravessar uma rua, etc., está-se relacionando, mentalmente, grandezas entre si, por meio de uma proporção. Em relação às proporções, julgue os itens abaixo.
( ) A quantidade de tinta necessária para fazer uma pintura depende diretamente da área da região a ser pintada.
( ) O número de pintores e o tempo que eles gastam para pintar um prédio são grandezas inversamente proporcionais.
( ) A medida do lado de um triângulo equilátero e o seu perímetro são grandezas diretamente proporcionais.
( ) O número de ganhadores de um único prêmio de uma loteria e a quantia recebida por cada ganhador são grandezas inversamente proporcionais.
( ) A velocidade desenvolvida por um automóvel e o tempo gasto para percorrer certa distância são grandezas diretamente proporcionais.

5. Se 3 kg de queijo custam R$ 24,60, quanto custarão 5 kg deste queijo?

6. Se 3 kg de queijo custam R$ 24,60, quanto deste queijo poderei comprar com R$ 53,30?

7. Cem quilogramas de arroz com casca fornecem 96 kg de arroz sem casca. Quantos quilogramas de arroz com casca serão necessários para produzir 300 kg de arroz sem casca?

8. Em 8 dias 5 pintores pintam um prédio inteiro. Se fossem 3 pintores a mais, quantos dias seriam necessários para pintar o mesmo prédio?

9. Um veículo trafegando com uma velocidade média de 60 km/h, faz determinado percurso em duas horas. Quanto tempo levaria um outro veículo para cumprir o mesmo percurso se ele mantivesse uma velocidade média de 80 km/h?

10. Uma roda-d'água dá 390 voltas em 13 minutos. Quantas voltas terá dado em uma hora e meia?

11. Duas rodas dentadas estão engrenadas uma na outra. A menor delas tem 12 dentes e a maior tem 78 dentes. Quantas voltas terá dado a menor quando a maior der 10 voltas?

12. Qual é a altura de um edifício que projeta uma sombra de 12m, se, no mesmo instante, uma estaca vertical de 1,5m projeta uma sombra de 0,5m?

13. Se um relógio adianta 18 minutos por dia, quanto terá adiantado ao longo de 4h 40min?

14. Um relógio que adianta 15 minutos por dia estava marcando a hora certa às 7h da manhã de um certo dia. Qual será a hora certa quando, neste mesmo dia, este relógio estiver marcando 15h 5min?

15. Um comerciante comprou duas peças de um mesmo tecido. A mais comprida custou R$ 660,00 enquanto a outra, 12 metros mais curta, custou R$ 528,00. Quanto media a mais comprida?

16. Um navio tinha víveres para uma viagem de 15 dias. Três dias após o início da viagem, contudo, o capitão do navio recebe a notícia de que o mau tempo previsto para o resto da viagem deve atrasá-la em mais 4 dias. Para quanto terá de ser reduzida a ração de cada tripulante?

17. Um rato está 30 metros à frente de um gato que o persegue. Enquanto o rato corre 8m, o gato corre 11m. Qual a distância que o gato terá de percorrer para alcançar o rato?

18. Um gato está 72m à frente de um cão que o persegue. Enquanto o gato corre 7m, o cão corre 9rn. Quantos metros o cão deverá percorrer para diminuir a metade da terça parte da distância que o separa do gato?

19. Um gato persegue um rato. Enquanto o gato dá dois pulos, o rato dá 3, mas, cada pulo do gato vale dois pulos do rato. Se a distância entre eles, inicialmente, é de 30 pulos de gato, quantos pulos o gato terá dado até alcançar o rato?

20. Um gato e meio come uma sardinha e meia em um minuto e meio. Em quanto tempo 9 gatos comerão uma dúzia e meia de sardinhas?

21. Se 2/5 de um trabalho foram feitos em 10 dias por 24 operários que trabalhavam 7 horas por dia, então quantos dias serão necessários para terminar o trabalho, sabendo que 4 operários foram dispensados e que o restante agora trabalha 6 horas por dia?

22. Um grupo de 15 mineiros extraiu em 30 dias 3,5 toneladas de carvão. Se esta equipe for aumentada para 20 mineiros, em quanto tempo serão extraídos 7 toneladas de carvão?

23. Dois cavalos, cujos valores são considerados como diretamente proporcionais às suas forças de trabalho e inversamente proporcionais às suas idades, têm o primeiro, 3 anos e 9 meses e o segundo, 5 anos e 4 meses de idade. Se o primeiro, que tem 3/4 da força do segundo, foi vendido por R$ 480,00, qual deve ser o preço de venda do segundo?

24. Se 27 operários, trabalhando 6 horas por dia levaram 40 dias para construir um parque de formato retangular medindo 450m de comprimento por 200m de largura, quantos operários serão necessários para construir um outro parque, também retangular, medindo 200m de comprimento por 300m de largura, em 18 dias e trabalhando 8 horas por dia?

25. Uma turma de 15 operários pretende terminar em 14 dias certa obra. Ao cabo de 9 dias, entretanto, fizeram somente 1/3 da obra. Com quantos operários a turma original deverá ser reforçada para que a obra seja concluída no tempo fixado?

PORCENTAGENS

Razão centesimal

Chamamos de razão centesimal a toda razão cujo conseqüente (denominador) seja igual a 100.

Exemplos:

$$\frac{6}{100};\quad \frac{43}{100};\quad \frac{5{,}2}{100};\quad \frac{270}{100}$$

Outros nomes usados para uma razão centesimal são **razão porcentual** e **percentil**.

Taxa porcentual

Quando substituímos o conseqüente 100 pelo símbolo % (lê-se "por cento") temos uma **taxa porcentual** ou **taxa centesimal**.
Exemplos:

$$\frac{72}{100} = 72\% \ \text{(setenta e dois por cento)}$$

$$\frac{9}{100} = 9\% \ \text{(nove por cento)}$$

Porcentagem

Dada uma razão qualquer $\frac{p}{v}$, chamamos de porcentagem do valor **v** a todo valor de **p** que estabeleça uma proporção com alguma razão centesimal.

$$\boxed{\frac{p}{v} = \frac{r}{100} = r\%}$$

Na prática, pode-se determinar o valor **p** da porcentagem de dois modos:

1° modo: Multiplicando-se a razão centesimal pelo valor **v**.

$$p = \frac{r}{100} \times \mathbf{v}$$

A expressão acima justifica dizermos **que "p é igual a r % de v".**

2º modo: Resolvendo a regra de três que compara v a 100%:

valores	taxas
p ———	r%
v ———	100%

Atenção:
Nas questões de concursos públicos é comum encontrarmos:

• "**porcentagem**" no lugar de "**taxa percentual**".
Exemplo: "a porcentagem foi de 20%;

• **desconto**, **abatimento**, **lucro**, **prejuízo**, etc. indicando uma **porcentagem** em situações específicas;

• a expressão "**principal**" indicando o valor de **referência** (v) que corresponde a 100%.

Observe que resolver uma porcentagem ou uma taxa percentual é, fundamentalmente, resolver uma proporção ou uma regra de três simples.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. *A conta de um restaurante indicava uma despesa de R$ 26,00 e trazia a seguinte observação:"Não incluímos os 10% de serviço". Quanto representam, em dinheiro, os 10% de serviço e quanto fica o total da despesa se nela incluirmos a porcentagem referente ao serviço?*

Solução:

$$10\textbf{\%}\text{ de } 26{,}00 = \frac{10}{100} \text{ x } 26 = \frac{260}{100} = 2{,}60$$

Portanto, os 10% de serviço representam R$ 2,60.

Incluindo esta porcentagem na despesa original, teremos:

26,00 + 2,60 = 28,60

Assim, o total da despesa passa a ser de R$ 28,60.

2. *Num laboratório, 32% das cobaias são brancas e as outras 204 são cinzas. Quantas cobaias há neste laboratório?*

Solução:

O total de cobaias corresponde a 100%:

brancas (32%) + cinzas (x%) = total (100%)

x%=100%-32%=68%

Então, as 204 cobaias cinzas são 68% do total.
Chamando o total de cobaias de C, poderemos escrever:

$$68\% \text{ de C} = 204$$

$$\frac{68}{100} \cdot \text{C} = 204$$

$$\text{C} = \frac{204 \text{ x } 100}{68}$$

$$\text{C} = 300$$

Portanto, há 300 cobaias no laboratório.

3. *O preço de um produto **A** é 30% maior que o de **B** e o preço deste é 20% menor que o de **C**. Sabese que **A**, **B** e **C** custaram, juntos, R$ 28,40. Qual o preço de cada um deles?*

Solução:

Digamos que os preços de **A**, **B** e **C** são **a**, **b** e **c**, respectivamente:

$$\mathbf{a} = 100\% \text{ de } \mathbf{b} \textbf{ mais } 30\% \text{ de } \mathbf{b} = 130\% \text{ de}$$

$$\mathbf{b} = \frac{130}{100} \text{ x } \mathbf{b} = 1{,}3\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = 100\% \text{ de } \mathbf{c} \textbf{ menos } 20\%\text{de } \mathbf{c} = 80\% \text{ de}$$

$$\mathbf{c} = \frac{80}{100} \text{ x } \mathbf{c} = 0{,}8\,\mathbf{c}$$

Comparando as duas igualdades acima, temos:

b = 0,8c e a = 1,3b, portanto a = 1,3x(0,8c)

a = 1,04c

O preço dos três, juntos é R$ 28,40:

a + b + c = 28,40

1,04c+0,8c+ 1c=28,40

2,84c = 28,40

c = 10,00 (valor de C)

$b = 0{,}8c = 0{,}8 \times 10 = 8{,}00$ (valor de B)

$a = 1{,}04c = 1{,}04 \times 10 = 10{,}40$ (valor de A)

Então, os preços são: **A** custa R$ 10,40, **B** custa R$ 8,00 e **C** custa R$ 10,00.

4. Uma mercadoria foi vendida com um **lucro de 20% sobre a venda**. Qual o preço de venda desta mercadoria se o seu preço de custo foi de R$ 160,00?

Solução:

A expressão "**lucro sobre a venda**" significa que o **valor de referência** para o cálculo do percentual de lucro é o **preço de venda** (ao contrário do que é comum!). Portanto, devemos fazer o preço de venda corresponder a 100%.

Observe, então, o esquema:

X%		100%
PREÇO DE CUSTO c = 160,00	+20% → +LUCRO	PREÇO DE VENDA V=?

x % + 20% = 100%

logo: x% = 80% (correspondente ao preço de custo)

Temos, agora, uma regra de três simples:

80% correspondem a 160,00 (preço de custo)
100% correspondem a V = ? (preço de venda)

Resolvendo, nos dá:

$$V = \frac{160 \times 100}{80} = 200{,}00$$

Então, o preço de venda foi de R$ 200,00.

5. Para atrair fregueses, um supermercado anuncia por R$ 10,00 um determinado produto que lhe custou R$ 13,00. Determine a taxa porcentual de prejuízo sobre o preço de venda.

Solução:

A expressão "**prejuízo sobre o preço de venda**" significa que o **valor de referência** para o cálculo da taxa percentual deverá ser o **preço de venda.**

Observe o esquema:

		100%
PREÇO DE CUSTO c = 13,00	x% → PREJUÍZO = 3,00	PREÇO DE VENDA V= 10,00

O prejuízo de R$ 3,00 foi determinado pela diferença entre os preços de custo e de venda:

13,00 - 10,00= 3,00

Temos, outra vez, uma regra de três simples:

(preço de venda) 10,00 correspondem a 100 (prejuízo)
3,00 correspondem a x%

Resolvendo, encontramos:

$$x\% = \frac{100 \times 3}{10} = 30\%$$

Então, a taxa de prejuízo sobre a venda é de 30%.

EXERCÍCIOS – PORCENTAGENS

1. Em um concurso havia 15.000 homens e 10.000 mulheres. Sabe-se que 60% dos homens e 55% das mulheres foram aprovados. Do total de candidatos, quantos por cento foram reprovados?

2. Uma cidade possui uma população de 100.000 habitantes, dos quais alguns são eleitores. Na eleição para a prefeitura da cidade havia 3 candidatos. Sabendo se que o candidato **A** obteve 20% dos votos dos eleitores, que o candidato **B** obteve 30%, que os votos nulos foram 10%, que o candidato **C** obteve 12.000 votos e que não houve abstenções, a parte da população que não é eleitora é de quantos habitantes.

3. (Metrô-Técnico de Contabilidade-2°G-IDR/94) João, Antônio e Ricardo são operários de uma certa empresa. Antônio ganha 30% a mais que João, e Ricardo, 10% a menos que Antônio. A soma do salário dos três, neste mês, foi de R$ 4.858,00. Qual a quantia que coube a Antônio?

4. Fiz em 50min o percurso de casa até a escola. Quanto tempo gastaria na volta, se utilizasse uma velocidade 20% menor?

5. A população de uma cidade aumenta à taxa de 10% ao ano. Sabendo-se que em 1990 a população era de 200.000 hab..Quantos habitantes esta cidade tem em 1994?

6. (UnB/93) A soma de dois n6meros **x** e **y** e 28 e a razão entre eles e de 75%. Qual e o maior desses números?

7. Calcular:
a)30% de 20% de 40%
b) $\sqrt{81}$**%**

8. Um depósito de combustível de capacidade de 8m^3 tem 75% de sua capacidade preenchida. Quantos m^3 de combustível serão necessários para preenche-lo'?

9. (CEF/91) Num grupo de 400 pessoas, 70% são do sexo masculino. Se, nesse grupo, 10% dos homens são casados e 20% das mulheres são casadas. Qual o número de pessoas casadas?

10.(CEB-Contador-IDR/94) Para obter um lucro de 25% sobre o preço de venda de um produto adquirido por R$ 615,00, o comerciante deverá vende-lo por quanto?

11.(Metrô-Assist. Administrativo-IDR/94) Uma mercadoria custou R$ 100,00. Para obter-se um lucro de 20% sobre o preço de venda, por quanto deverá ser vendida?'

12.(TTN/89-2°G) Antônio comprou um conjunto de sofás com um desconto de 20% sobre o preço de venda. Sabendo-se que o valor pago por Antônio foi de R$ 1.200,00, de quanto era o preço de venda da mercadoria?

13.(TTN/89) Um produto é vendido com um lucro bruto de 20%. Sobre o preço total da nota, 10% correspondem a despesas. De quantos por cento foi o lucro líquido do comerciante?

14.Um cliente obteve de um comerciante desconto de 20% no preço da mercadoria. Sabendo-se que o preço de venda, sem desconto, e superior em 20% ao do custo, pode-se afirmar que houve, por parte do comerciante um lucro ou um prejuízo e de quanto?

15.Quanto por cento sobre o custo corresponde a um lucro de 60% sobre a venda?

TESTES – PORCENTAGENS

1. (TTN/89) Um cliente obteve do comerciante desconto de 20% no prego da mercadoria. Sabendo-se que o preço de venda, sem desconto, é superior em 20% ao do custo, pode-se afirmar que houve por parte do comerciante um:
a) lucro de 5%
b) prejuízo de 4%
c) lucro de 4%
d) prejuízo de 2%
e) lucro de 2%

2. (TIN/89) Um terreno foi vendido por NCz$16.500,00, com um lucro de 10%; em seguida, foi revendido por NCz$ 20.700,00. O lucro total das duas transações representa sobre o curso inicial do terreno um percentual de:
a) 38,00%
b) 40,00%
c) 28,00%
d) 51,80%

e) 25,45%

3. (TTN/92) Maria vendeu um relógio por Cr$18.167,50 com um prejuízo de 15,5% sobre o preço de compra. Para que tivesse um lucro de 25% sobre o custo, ela deveria ter vendido por:
a) 22.709,37
b) 26.875,00
c) 27.675,00
d) 21.497,64
e) 26.785,00

4. (AFTN/96) De todos os empregados de uma grande empresa, 30% optaram por realizar um curso de especialização. Essa empresa tem sua matriz localizada na capital. Possui, também, dual filiais, uma em Ouro Preto e outra em Montes Claros. Na matriz trabalham 45% dos empregados e na filial de Ouro Preto trabalham 20% dos empregados. Sabendo-se que 20% dos empregados da capital optaram pela realização do curso e que 35% dos empregados da filial de Ouro Preto também o fizeram, então a percentagem dos empregados da filial de Montes Claros que não optaram pelo curso é igual a:
a)60%
b) 40%
c) 35%
d)21%
e) 14%

5. (AFTN/96) O salário mensal de um vendedor e constituído de uma parte fixa igual a R$ 2.300,00 e mais uma comissão de 3% sobre o total de vendas que exceder a R$ 10.000,00. Calcula-se em 10% o percentual de descontos diversos que incidem sobre seu salário bruto. Em dois meses consecutivos, o vendedor recebeu, líquido, respectivamente, R$ 4.500,00 e R$ 5.310,00. Com esses dados, pode-se afirmar que suas vendas no segundo mês foram superiores as do primeiro mês em:
a) 18%
b) 20%
c) 30%
d) 33%
e) 41 %

EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Denominamos equações do primeiro grau às equações redutíveis à forma:

a**x** + b = 0 (com a $\neq$ 0)

Exemplos:

5**x** + 10 = 0
5**x** + 2 = 2**x**+21

Raiz de uma Equação

Raiz de uma equação é qualquer valor para **x** que satisfaça a equação.
Resolver uma equação significa encontrar o conjunto de todas as suas raízes.
As equações do 1° grau têm sempre **uma única raiz real**. Pode-se encontrar a raiz, de uma equação do primeiro grau isolando a variável.

Exemplos:
Para encontrar a raiz de 5x + 10 = 0, fazemos:

5x + 10 = 0
5x = -10
x =(-10) $\div$ 5
x = -2
raiz: -2

Para resolver a equação 5x + 2 = 2x + 23, fazemos:

5x + 2 = 2x + 23
5x - 2x = 23 –2
3x = 21
x = 21 $\div$ 3
x = 7
raiz: 7

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos exercícios 1 a 10, resolva as equações do 1° grau.

1. 5x + 8 = 2x - 25

2. 3x - 42 = 7x - 78

3. -3(3x - 42) = 2(7x - 52)

4. $\frac{x}{2}+\frac{1-x}{5}=\frac{1}{2}$

5. $\frac{3x-6}{2}=\frac{5x-9}{3}$

6. $\frac{x+3}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{-1}{2}$

7. $\frac{1+x}{6}+\frac{2-x}{3}-\frac{1}{2}=0$

8. $\frac{3+x}{2}-(1+x)=\frac{x-1}{4}$

9. $\frac{3x-1}{2}-\frac{4x+2}{4}-\frac{2x-4}{3}=\frac{x-5}{6}$

10. $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{3(1+x)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{x-1}{3}$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Um sistema de equações com duas variáveis, x e y, é um conjunto de equações do tipo

$ax + by = c$ ($a, b, c \in$ R)

ou de equações redutíveis a esta forma.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Resolver um sistema significa encontrar todos os pares ordenados (x; y) onde os valores de x e de y satisfazem a todas as equações do sistema ao mesmo tempo.

Exemplo:

No sistema indicado no exemplo anterior, o único par ordenado capaz de satisfazer às duas equações simultaneamente é

(x; y) = (2; 1)

Ou seja, x = 2 e y = 1

Resolução algébrica

Dentre os vários métodos de resolução algébrica aplicáveis aos sistemas do 1° grau, destacamos dois:
• método da adição
• método da substituição

Para exemplificá-los, resolveremos o sistema seguinte pelos dois métodos:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & \textbf{(I)} \\ 3x + 2y = 12 & \textbf{(II)} \end{cases}$$

A) Método da Adição

1° passo: Multiplicamos as equações por números escolhidos de forma a obtermos **coeficientes opostos** em uma das variáveis.
No caso, poderemos multiplicar a equação (I) por -2:

$$2x + y = 7 \xrightarrow{x(-2)} -4 - 2y = -14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -14 & \textbf{(I)} \\ 3x + 2y = 12 & \textbf{(II)} \end{cases}$$

Observe que a variável y tem, agora, **coeficientes opostos.**

2º passo: Somamos membro a membro as equações encontradas:

$$\begin{array}{r} -4x - 2y = -14 \\ + \quad 3x + 2y = 12 \\ \hline -1x + 0 = -2 \end{array}$$

A variável y foi **cancelada** restando apenas a variável x na última equação.

3º passo: Resolvemos a equação resultante que tem somente uma variável:

-1x = -2

$\boxed{x = 2}$

4º passo: O valor da variável encontrada é substituído numa das equações iniciais que contenha também a outra variável e, então, resolvemos a equação resultante:

2x + y = 7

$2(2) + y = 7$
$4 + y = 7$
$y = 7 - 4$

$\boxed{y = 3}$

5º passo: Escrevemos o conjunto-solução:

S = {(2; 3)}

B) Método da Substituição

1º passo: Isolamos uma das variáveis em uma das equações dadas:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \rightarrow y = 7 - 2x \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

2º passo: a variável isolada é substituída na outra equação e, então, resolvemos a equação resultante que tem somente uma variável:

$3x + 2y = 12$
$3x + 2(7 - 2x) = 12$
$3x + 14 - 4x = 12$
$3x - 4x = 12 - 14$
$-1x = -2$
$x = 2$

3º passo: Levamos o valor encontrado para a equação que tem a variável isolada e calculamos o valor desta:

$y = 7 - 2x$
$y = 7 - 2(2)$
$y = 7 - 4$
$y = 3$

4° passo: Escrevemos o conjunto-solução:

S = {(2; 3)}

Sistema indeterminado

Se, ao tentarmos encontrar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo

0 = 0
ou
3 = 3

ou qualquer outra que expresse uma sentença sempre verdadeira, o sistema terá **infinitas soluções** e diremos que ele é **possível mas indeterminado**.

Sistema impossível

Se, ao tentarmos encontrar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo

0 = 3
ou
2 = 5

ou qualquer outra que expresse uma sentença sempre falsa, o sistema **não terá qualquer solução** e diremos que ele é **impossível.**
O conjunto-solução de um sistema impossível é **vazio**.

Resolução gráfica

Vamos considerar um sistema do 1° grau com duas variáveis e duas equações:

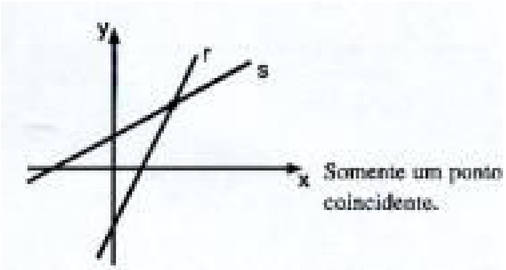
$$\begin{cases} ax + by = c & (r) \\ mx + ny = p & (s) \end{cases}$$ Cada equação do sistema representa uma reta.

Cada ponto comum às retas do sistema corresponde a uma solução. Então, as pergunta-chaves são:

As retas do sistema têm algum ponto em comum?
Quantos?

Graficamente, existirão três situações possíveis:

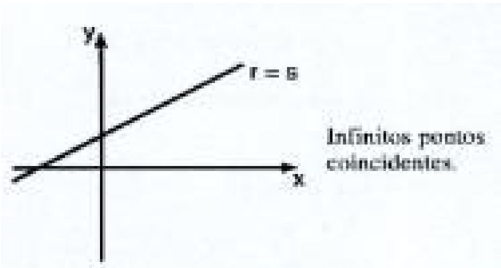
1º) **Retas Concorrentes**



Se as retas forem concorrentes o sistema terá **uma única solução**. Será um sistema **possível e deter- minado.**

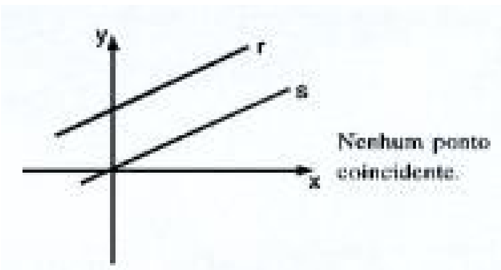
2°) **Retas Paralelas Coincidentes**

Se as retas forem coincidentes o sistema terá **infinitas soluções.** Será um sistema **possível mas indeterminado.**



3°) **Retas Paralelas Distintas**

Se as retas forem paralelas e distintas o sistema **não terá qualquer solução.** Será um sistema **impossível.**



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 7y = 13 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + 5y = 17 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$

2. Dividir o numero 85 em duas partes, tais que a maior exceda a menor em 21 unidades.

3. Dois números são tais que multiplicando-se o maior por 5 e o menor por 6 os produtos serão iguais. O menor, aumentado de 1 unidade, fica igual ao maior, diminuído de 2 unidades. Quais são estes números?

4. Numa gincana cultural, cada resposta correta vale 5 pontos, mas perdem-se 3 pontos para cada resposta errada. Em 20 perguntas, minha equipe só conseguiu 44 pontos. Quantas perguntas ela acertou?

5. Somando-se 8 ao numerador, uma fração fica eqüivalendo a 1. Se, em vez disso, somássemos 7 ao denominador, a fração ficaria equivalente a $\frac{1}{2}$. Qual é a fração original?

6. Num quintal encontram-se galinhas e coelhos, num total de 30 animais. Contando os pés seriam, ao todo, 94. Quantos coelhos e quantas galinhas estão no quintal?

7. Quando o professor Oliveira entrou na sala dos professores, o número de professores presentes ficou igual ao triplo do número de professoras. Se, juntamente com o professor, entrasse também uma professora, o número destas seria a metade do número de professores (homens). Quantos professores (homens e mulheres) estavam na sala após a chegada do professor Oliveira?

8. A soma dos valores absolutos dos dois algarismos de um número é 9. Somado com 27, totaliza outro número, representado pelos mesmos algarismos dele, mas na ordem inversa. Qual é este número?

9. Um colégio tem 525 alunos, entre moças e rapazes. A soma dos quocientes do número de rapazes por 25 e do número de moças por 30 é igual a 20. Quantos são os rapazes e quantas são as moças do colégio?

10. José Antônio tem o dobro da idade que Antonio José tinha quando José Antônio tinha a idade que Antonio José tem. Quando Antônio José tiver a idade que José Antônio tem, a soma das idades deles será 63 anos. Quantos anos tem cada um deles?

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Denominamos equação do 2° grau a toda equação da forma

$$\mathbf{ax^2 + bx + e = 0, (a \neq 0)}$$

ou qualquer equação redutível a esta forma.

Exemplos:
a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $3x^2 + 2 = 0$
c) $-3x^2 + 27 = 0$
Resolver uma equação do 2° grau significa determinar valores da incógnita que tornem a equação verdadeira.

Cada valor nestas condições será então chamado **raiz da equação**.

Resolução Algébrica

A determinação algébrica das raízes de uma equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, pode ser obtida com a **fórmula de Báskara:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante da equação)

O sinal do discriminante, Δ, determina a quantidade de raízes da equação do segundo grau:

- $\Delta > 0 \leftrightarrow$ duas raízes reais e distintas;
- $\Delta = 0 \leftrightarrow$ uma única raiz real (duas raízes iguais);
- $\Delta < 0 \leftrightarrow$ nenhuma raiz real.

Determinação de Raízes Usando a Somo e o Produto

Freqüentemente, as raízes das equações quadráticas com que nos deparamos são números racionais ou até inteiros.
Nestes casos, podemos usar um "atalho" para determinar as raízes, comparando o **produto** e a **soma** das mesmas, como ilustraremos a seguir.

1° caso - Raízes Inteiras

Vamos determinar as raízes das equações nos exemplos abaixo:

a) $-3x^2 + 30x - 72 = 0$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-30}{-3} = 10 \text{ (soma das raízes)}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-72}{-3} = 24 \text{ (produto das raízes)}$$

Começaremos pelo produto, fazendo uma lista **ordenada** de todos os produtos possíveis e **iniciando sempre pelos menores fatores:**

P = 24

deste lado ficam os menores		
	1	24
	2	12
	3	8
	4	6

Depois daremos os sinais aos fatores, do seguinte modo:

1° - o **S**inal da **S**oma **S**empre na **S**egunda coluna;
2° - na primeira coluna usaremos:

- <u>mesmo sinal</u> de **S** - se **P** é <u>positivo</u>.
- <u>sinal oposto</u> de **S** - se **P** é <u>negativo</u>.

P = 24

mesmo sinal de S, pois P=(+)			Sinal da Soma na Segunda Coluna S=(+)
	+ 1	+24	
	+ 2	+12	
	+ 3	+8	
	+ 4	+6	

Finalmente, procuramos em qual das linhas se encontra o par que nos dá a **soma correta** (S = 10), pois aí estarão as raízes:

P = 24

+ 1	+ 24

+ 2	+ 12
+ 3	+ 8
+ 4	**+ 6**

Este par faz S = 10 → $\boxed{+4 \quad +6}$ → As raízes são +4 e +6

b) $2x^2 + 28x + 48 = 0$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-28}{2} = -14$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{48}{2} = 24$$

Fazendo a lista dos produtos e colocando os sinais, teremos:

P = 24

- 1	- 24
- 2	**- 12**
- 3	- 8
- 4	- 6

Mesmo sinal, de S, pois P = (+)

Sinal da Soma na Segunda Coluna S = (-)

A segunda linha nos deu **a soma correta** (S =-14).

Portanto:
As raízes são -2 e -12.

c) $-5x^2 + 25x + 120 = 0$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-25}{-5} = 5$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{120}{-5} = -24$$

Fazendo a lista dos produtos e colocando os sinais:

P = -24

- 1	+ 24
- 2	+ 12
- 3	**+ 8**
- 4	+ 6

Sinal **oposto** de S, pois P = (-)

Sinal da Soma na Segunda Coluna S = (+)

A terceira linha nos deu a **soma correta** (S = 5).

Logo:
As raízes são -3 e +8.

2º caso - Raízes Fracionárias (usando Soma e Produto!)

a) $-12x^2 + x + 6 = 0$

Se você já estudou este assunto anteriormente, provavelmente ouviu dizer que casos como este eram "impossíveis" ou "muito difíceis" de se resolver por soma e produto. Mas não é bem assim.
Na verdade é até bem fácil. Veja como:

• Método "Locikiano"

Primeiro, devemos sempre trabalhar com o **coeficiente principal (a) positivo.**

Isto é feito multiplicando a equação por **-1**, que não altera as raízes:

$$-12x^2 + x + 6 = 0 \xrightarrow{x(-1)} 12x^2 - x - 6 = 0$$

Agora "passaremos" o coeficiente principal (a = 12) para o termo independente, multiplicando-os e conseguindo uma nova equação:

$$\mathbf{12}x^2 - x - \mathbf{6} = 0 \xrightarrow{12x(-6)=-72} \overbrace{x^2\ x - \mathbf{72} = 0}^{\text{nova equação}}$$

Nesta equação nova, procuraremos as raízes:

$x^2 - x - 72 = 0$

$S = \frac{-b}{a} = \frac{1}{1} = 1$

$P = \frac{c}{a} = \frac{-72}{1} = -72$

P = -72

- 1	+ 72
- 2	+ 36
- 3	+ 24
- 4	+ 18
- 6	+ 12
- 8	**+ 9**

$\rightarrow$ raízes da equação nova: -8 e +9.

Finalmente, obteremos as raízes da equação original **dividindo** as raízes da equação nova por $|a|$ ($|a|$ =

$\frac{-8}{12}$ e $\frac{+9}{12}$ que, simplificadas, dão: $\frac{-2}{3}$ e $\frac{+3}{4}$

Então, as raízes da equação $-12x^2 + x + 6 = 0$ são: $\frac{-2}{3}$ e $\frac{+3}{4}$

b) $2x^2+9x-5=0$

1º) "Passando" o coeficiente principal (que já é positivo)

$$\mathbf{2}x^2 + 9x - \mathbf{5} = 0 \xrightarrow{2x(-5)=10} \overbrace{x^2 + 9x - \mathbf{10} = 0}^{\text{nova equação}}$$

2°) Resolvendo a nova equação: $x^2 + 9x - 10 = 0$

P = -10

+1	-10
+2	-5

$\leftarrow$ raízes da equação nova: +1 e -10

3º) Dividindo as raízes encontradas por $|a|$ = +2: $\frac{+1}{2}$ e $\frac{-10}{2}$, ou sejam: $\frac{1}{2}$ e – 5

Então as raízes de $2x^2 + 9x - 5 = 0$ são: $\frac{1}{2}$ e – 5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolva as seguintes equações incompletas do segundo grau:
a) $x^2 - 25 = 0$
b) $3x^2 - 108 = 0$
c) $5x^2 – 980 = 0$
d) $x^2 - 1.225 = 0$
e) $2x^2 - 16 = 0$
f) $-3x^2 + 60 = 0$

2. Resolva as seguintes equações incompletas do segundo grau:
a) $x^2 – 6x = 0$
b) $x^2 + 6x = 0$
c) $2x^2 - 3x = 0$
d) $-5x^2 + 7x = 0$
e) $19x^2 - 15x = 0$
f) $0,5x^2 + 3x = 0$

3. Resolva as seguintes equações completas do segundo grau.
a) $x^2 - 13x + 12 = 0$
b) $x^2 - 8x + 12 = 0$

c) $x^2 + 7x + 12 = 0$
d) $x^2 - 20x + 36 = 0$
e) $x^2 + 15x + 36 = 0$
f) $x^2 - 11x - 12 = 0$
g) $x^2 + 11x - 12 = 0$
h) $x^2 - x - 12 = 0$
i) $x^2 + x - 12 = 0$
j) $x^2 - 9x - 36 = 0$
k) $-x^2 + 8x + 20 = 0$
l) $-x^2 + x + 20 = 0$
m) $-x^2 + x + 12 = 0$
n) $-x^2 - 35x + 36 = 0$
0) $-x^2 + 37x - 36 = 0$

4. Resolva as seguintes equações completas do segundo grau.
a) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
b) $15x^2 - 8x + 1 = 0$
c) $3x^2 + 4x + 1 = 0$
d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

5. Verifique se -2 é raiz da equação $2x^2 - 5x - 18 = 0$.

6. Calcular **m** na equação $mx^2 - 3x + (m - 1) = 0$, de modo que uma de suas raízes seja igual a 1.

7. Determine **m** na equação $2x^2 - mx + x + 8 = 0$, de modo que a soma de suas raízes seja igual a 5.

8. Determine **m** tal que as raízes de $4x^2 + (m + 1)x + (m + 6) = 0$ sejam iguais.

9. Determine dois números cuja soma seja -2 e o produto seja -15.

10. Decompor o número 21 em duas parcelas tais que o produto entre elas seja 110.

11. A soma de um número natural com o seu quadrado é igual a 72. Determine este número.

12. A soma de certo número inteiro com o seu inverso é igual a 50/7. Qual é esse número?

13. Determine dois números inteiros e consecutivos tais que a soma dos seus inversos seja 5/6.

14. Determine dois números pares, positivos e consecutivos cujo produto seja 120.

15. A diferença entre o quadrado e o triplo de um mesmo número natural é igual a 54. Determine esse número.

INEQUAÇÕES DO 1° E DO 2º GRAUS

Resolver uma inequação num dado conjunto numérico **U (universo)** significa encontrar o conjunto de todos os valores de **U** que tornam verdadeira a inequação. Este subconjunto de **U** é chamado **conjunto-solução** ou **conjunto-verdade** da inequação.

Inequações do 1º grau

Denominamos inequações do primeiro grau às inequações redutíveis a uma das seguintes formas:

$a\mathbf{x} + b < 0$
$a\mathbf{x} + b < 0$
$a\mathbf{x} + b > 0$
$a\mathbf{x} + b > 0$
$a\mathbf{x} + b \neq 0$

(todas com $a \neq 0$)

Obs.: É sempre possível multiplicar os dois lados de uma inequação por -1 para obter $a > 0$, lembrando que ao multiplicar a inequação por -1 os sinais > e < serão sempre trocados um pelo outro.

Sendo $a > 0$, teremos:

$a\mathbf{x} + b < 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} < -b/a$
$a\mathbf{x} + b \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq -b/a$
$a\mathbf{x} + b > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} > -b/a$

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -b/a$$
$$ax + b \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -b/a$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos exercícios 1 a 10, resolva as inequações do 1° grau no universo dos números reais:

1. $2x + 16 < 0$
2. $-5x + 10 \leq 0$
3. $3x + 4 \geq 2x + 5$
4. $9x + 4 > 11x - 3$
5. $3x - 2 > 20$
6. $8(1 - 2x) \geq 6 - 3x$
7. $7x - 1 \leq 27$
8. $\frac{3x - 6}{4} \neq \frac{5x - 9}{6}$
9. $\frac{x}{2} + \frac{1 - x}{5} > \frac{1}{2}$
10. $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) - 1 < -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - x\right)$

Inequações do 2° Grau

Denominamos inequações do segundo grau às inequações redutíveis a uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$
$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c \neq 0$$

(todas com $a \neq 0$)

Sejam **a > 0** e $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$, tem-se:

$\Delta > 0 \rightarrow ax^2 + bx + c$ será:
positiva, para todo **x fora** do intervalo limitado pelas duas raízes;
igual a zero, para **x igual** a qualquer uma das duas raízes;
negativa, para todo **x dentro** do intervalo limitado pelas duas raízes.

$\mathbf{\Delta = 0} \rightarrow ax^2 + bx + c$ será:
igual a zero quando **x** for a raiz;
positiva para todos os outros valores de **x**.

$\Delta < 0 \rightarrow ax^2 + bx + c$ será **sempre positiva**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolver a inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$

Solução: Já temos **a** > 0.

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$ (positivo $\rightarrow$ duas raízes)

Então $f(x) > 0$ ocorrerá para todo **x fora** do intervalo limitado pelas raízes.

Como as raízes são 1 e 2, teremos: **x** < 1 ou **x** > 2.

$$S = \{x \in \mathbf{R} / x < 1 \text{ ou } x > 2\}$$

2. Resolver a inequação $-4x^2 + 4x - 1 < 0$

Solução: Multiplicando a inequação por -1, faremos **a** > 0:

$$4x^2 - 4x + 1 > 0$$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$ (nulo $\rightarrow$ uma só raiz)

Então $f(x) > 0$ ocorrerá para todo **x diferente** da raiz.

Como a raiz é 1/2, teremos: $\mathbf{x} \neq 1/2$.

$S=\{x \in \mathbf{R} / x \neq 1/2\}$

3. Resolvera inequação $x^2 - 5x + 8 < 0$

Solução: Já temos **a** > 0:

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(8) = 25 - 32 = -7$ (negativos $\rightarrow$ não há raízes)

Então f(x) será sempre **positiva** (pois **a** > 0)

Como o pedido foi f(x) < 0 (que nunca ocorrerá) teremos um conjunto-solução **vazio**, pois não há qualquer valor que satisfaça f(x) < 0.

$S = \varnothing$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos exercícios 1 a 5, resolver as inequações do 2° grau.

1. $\mathbf{x}^2 + 11\mathbf{x} - 12 > 0$
2. $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} + 12 \geq 0$
3. $\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} + 9 > 0$
4. $-\mathbf{x}^2 - 16\mathbf{x} - 64 \geq 0$
5. $3\mathbf{x}^2 + 42 < 0$

SISTEMAS LINEARES

É todo sistema de **m** equações a **n** incógnitas do tipo:

$$S = \left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & ..... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & ..... + a_{2n}x_n & = b_2 \\ a_{31}x_1 & + a_{32}x_2 & ..... + a_{3n}x_n & = b_3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & ..... + a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$$

onde:

$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ - são as **incógnitas**
a_{ij} - são os **coeficientes** das incógnitas
$b_1 , b_2 , \ldots , b_n$ - são os **termos independentes**.

Exemplos:

1º - O sistema S_1, abaixo, é um sistema linear com 3 equações e 3 variáveis.

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 2 \\ -2x + 3y + 4z = 7 \\ x + y + 5z = 9 \end{array} \right.$$

2º - O sistema S_2, abaixo, é um sistema linear com 4 equações e 3 variáveis.

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 2 \\ -2x + 3y + 4z = 7 \\ x + y + 5z = 9 \\ 4x + y - 3z = 11 \end{array} \right.$$

3° - O sistema S_3, abaixo, é um sistema linear **homogêneo** com 3 equações e 3 variáveis.

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ X + y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

Este sistema é dito **homogêneo** pois todos os termos independentes são **nulos**.

Soluções de um Sistema Linear

Dizemos que um sistema de equações lineares com **n** incógnitas, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, admite como solução a seqüência ordenada (r_1 , r_2 , r_3 , ... r_n) se, e somente se, substituindo $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$, $x_3 = r_3$ ..... $x_n = r_n$ em todas as equações do sistema, elas se tornarem todas verdadeiras.

Exemplo:

O sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{array} \right.$$

tem uma solução igual a (7, 3) pois substituindo x = 7 e y = 3 em cada uma das duas equações do sistema teremos:

(7) + (3) = 10 (verdadeiro)
(7) - (3) = 4 (verdadeiro)

Um sistema linear pode ter mais de uma solução e pode até não ter solução alguma.

Se um sistema linear qualquer:

tem uma única solução - é chamado **determinado**;
tem várias soluções - é chamado **indeterminado**;
não tem solução - é chamado **impossível**.

Propriedades

1 - Um sistema linear homogêneo tem, sempre, pelo menos uma solução pois $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ... $x_n = 0$ sempre tornará todas as equações do sistema homogêneo verdadeiras. A solução (0, 0, 0, ..., 0) é chamada **solução trivial**.
2 - Um sistema com **n** equações e **n** variáveis terá uma única solução (sistema **determinado**) se e somente se o determinante formado pelos coeficientes do sistema for **diferente de zero**.

EXERCÍCIOS

1. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 7y = 13 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + 5y = 17 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

Considere o sistema abaixo, nas incógnitas x e y, para responder as questões 2 a 4.

$$\left[\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 6x + py = q \end{array}\right.$$

2. O sistema será indeterminado se e somente se
a) p = 3 e q = 15
b) p = 3 e q $\neq$ 15
c) p $\neq$ 3 e q = 15
d) p $\neq$ 3 e q $\neq$ 15
e) p $\neq$ 3 e qualquer que seja o valor de q.

3. O sistema será impossível se e somente se
a) p = 3 e q = 15
b) p = 3 e q $\neq$ 15

c) $p \neq 3$ e $q = 15$
d) $p \neq 3$ e $q \neq 15$
e) $p \neq 3$ e qualquer que seja o valor de q.

4. O sistema será determinado se e somente se
a) $p = 3$ e $q = 15$
b) $p = 3$ e $q \neq 15$
c) $p \neq 3$ e $q = 15$
d) $p \neq 3$ e $q \neq 15$
e) $p \neq 3$ e qualquer que seja o valor de q.

5. Resolvendo o sistema abaixo

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x + z = 35 \\ y + z = 38 \end{cases}$$

encontraremos
a) $x = 15$
b) $y = 12$
c) $z = 15$
d) $x = 12$
e) $y = 23$

6. Resolvendo o sistema abaixo

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + z = 8 \\ x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

encontraremos
a) $x = 3$
b) $y = 1$
c) $z = 2$
d) $x = 1$
e) $y = 3$

7. Dois números são tais que multiplicando-se o maior por 5 e o menor por 6 os produtos serão iguais. O menor, aumentado de 1 unidade, fica igual ao maior diminuído de 2 unidades. Então,
a) o produto deles é igual a 300.
b) cada um deles é maior que 20.
c) os dois números são ímpares.
d) os dois números são pares.
e) a soma deles é igual a 33.

8. Numa gincana cultural cada resposta correta vale 5 pontos, mas perdem-se 3 pontos a cada resposta errada. Em 20 perguntas uma equipe conseguiu uma pontuação final de 44 pontos. Quantas perguntas esta equipe acertou?
a) 7
b) 9
c) 11
d) 13
e) 15

9. Um colégio tem 525 alunos, entre moças e rapazes. A soma dos quocientes do número de rapazes por 25 e do número de moças por 30 é igual a 20. Quantas são as moças do colégio?
a) 150
b) 225
c) 250
d) 325
c) 375

10. Somando-se 8 ao numerador, uma fração ficaria equivalendo a 1. Se, em vez disso, somássemos 7 ao denominador da mesma fração, ela ficaria equivalendo a 1/2. A soma do numerador e do denominador desta fração é igual a
a) 36
b) 38
c) 40
d) 42
e) 44

11. Somando-se 8 ao numerador, uma fração fica equivalendo a 1. Se, em vez disso, somássemos 7 ao denominador, a fração ficaria equivalente a $\frac{1}{2}$. Qual é a fração original?

12. Num quintal encontram-se galinhas e coelhos, num total de 30 animais. Contando os pés seriam, ao todo, 94. Quantos coelhos e quantas galinhas estão no quintal?

13. A soma dos valores absolutos dos dois algarismos de um número é 9. Somado com 27, totaliza outro número, representado pelos mesmos algarismos dele, mas na ordem inversa. Qual é este número?

14. O mago Paulo Coelho tem em seu "laboratório" algumas cobras, sapos e morcegos. Ao todo são 14 cabeças, 26 patas e 6 asas. Quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

15. Calcular três números tais que a soma do 1° com o 2° é 40, a soma do 2° com o 3° é 70 e a soma do 1º com o 3° é 60.

16. José Antônio tem o dobro da idade que Antônio José tinha quando José Antônio tinha a idade que Antônio José tem. Quando Antônio José tiver a idade que José Antônio tem, a soma das idades deles será 63 anos. Quantos anos tem cada um deles?

17. Uma ração para canários é composta por dois tipos de sementes, A e B. Cada uma delas contém três nutrientes importantes, x, y e z, em quantidades diferentes, conforme mostrado na tabela abaixo.

	x	y	z
A	5	3	1
B	4	6	2

Se a ração for preparada com 2 partes da semente A e 3 partes da semente B, qual a quantidade que encontraremos para cada um dos três nutrientes?

Enunciado para as questões 18 e 19.

Ao se compararem 3 projetos diferentes para residências, constatou-se que as quantidades utilizadas para 4 materiais de acabamento variavam de um projeto para outro de acordo com a tabela abaixo que mostra as quantidades utilizadas para cada um deles.

	Tintas	cerâmicas	louças	vidros
Projeto A	6	9	4	6
Projeto B	8	4	3	5
Projeto C	5	10	2	4

Sabe-se que os custos unitários de cada material são: tinta = $ 12, cerâmica = $ 15, louça = $ 8 e vidro = $ 9. Pergunta-se:

18. Qual dos três projetos terá o menor custo de acabamento e de quanto será este custo?

19. Se uma cooperativa construir uma vila com 3, 5 e 2 casas de projetos A, B e C respectivamente, qual será o custo total do material de acabamento?

20. Uma fábrica produz três tipos de fertilizantes para o solo, A, B e C, cada um deles contendo determinada quantidade de nitrogênio (N), de fósforo (P) e de potássio (K). A tabela abaixo mostra, em g/kg, as concentrações de N, P e K em cada tipo de fertilizante.

	N	P	K
A	1	3	4
B	2	3	5
C	3	0	3

Para corrigir o solo de um determinado terreno, um agricultor necessita de 11g de N, 9g de P e 20g de K. Se o fertilizante A é vendido a $ 6,00 o kg enquanto B e C são vendidos a $ 1,00 o kg, determine as quantidades necessárias de A, B e C que fornecem as medidas desejadas pelo agricultor e que tenha um preço de $ 10,00.

21. (CESPE/93) Uma loja especializada em equipamentos de computação fabrica três tipos de microcomputadores: A, B e C, empregando, em cada um, componentes X, Y, Z e W, nas quantidades indicadas na tabela abaixo.

	X	Y	Z	W
A	5	20	16	7
B	7	18	12	9
C	6	25	8	5

Sabe-se que os preços, por unidade, dos componentes X, Y, Z e W são, respectivamente, $ 15.000, $ 8.000, $ 5.000 e $ 1.000. Os preços unitários de cada tipo de micro, A, B e C, serão, respectivamente:
a) $ 335.000, $ 318.000 e $ 322.000
b) $ 335.000, $ 322.000 e $ 318.000
c) $ 322.000, $ 318.000 e $ 335.000
d) $ 318.000, $ 322.000 e $ 335.000
e) $ 322.000, $ 335.000 e $ 318.000

22. (CESPE/93) Para uma construção foram pesquisados três tipos de concreto, de três diferentes fábricas, A, B e C. Para cada quilo de concreto, determinou-se que:
I - O concreto da fábrica A tem 1 unidade de brita, 3 de areia e 4 de cimento**.**
II - O concreto da fábrica B tem 2, 3 e 5 unidades, respectivamente, de brita, areia e cimento.
III - o concreto da fábrica C tem 3 unidades de brita, 2 de areia e 3 de cimento.
O concreto ideal deverá conter 23 unidades de brita, 25 de areia e 38 de cimento. Usando-se concreto das três fábricas, as quantidades, em kg, de cada uma delas, necessárias para se obter o concreto ideal serão, respectivamente, para A, B e C:
a) 5, 3 e 2
b) 4, 4 e 2
c) 3, 4 e 5
d) 2, 3 e 5
e) 1, 5 e 3

23. As idades de quatro pessoas são tais que: a soma das três primeiras é 73 anos;
a soma das três últimas é 60;
a primeira somada com as duas últimas é 63;
a última somada com as duas primeiras é 68.
A idade da mais velha é:
a) 32
b) 28
c) 25
d) 20
e) 15

FUNÇÕES E GRÁFICOS

Definições

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, chama-se função de A em B a qualquer relação tal que a cada um dos elementos do conjunto A corresponda sempre um único elemento do conjunto B.
Indicamos que uma relação f é uma função de A em B, escrevendo f**:** $A \to B$. O conjunto A é o **domínio** da função e o conjunto B é o **contradomínio**.

Domínio de f **-** D(f) = A

Contradomínio de f - CD(f) = B

Numa função f $A \to B$, chamamos de **conjunto Imagem** da função ao conjunto de todos os elementos de B (contradomínio) que tiveram alguma correspondência com valores de A (domínio).

Lei de uma função

Para o nosso estudo interessam apenas as funções definidas para conjuntos numéricos, cujas relações sejam definidas por operações aritméticas.
Exemplos:

1 - A função f**:** $N \to \mathbf{N^*}$ definida por f(**x**) = 3**x** +2 associa a cada **x** $\in$ **N** o número 3**x** +2 $\in$ **N*** chamado **imagem** do elemento **x.**

A imagem do elemento **x** = 5 será 17, pois 3(5) + 2 = 17

e anotamos f(5) = 17.

2 - A função f $\mathbf{Z} \to \mathbf{N^*}$ definida por f(**x**) = $3x^2$ + 2 associa a cada **x**$\in$ Z o número $3x^2$ +2$\in$ **N*** chamado **imagem** do elemento **x**.

A imagem do elemento **x** = -2 será 14, pois $3(-2)^2 + 2 = 3 \times 4 + 2 = 14$

e anotamos f(-2) = 14.

Gráfico de uma função

Considere todos os pares ordenados (x , y) onde **x** pertence ao domínio da função f e **y** é a imagem de **x** pela função f.
O **gráfico cartesiano** de uma função numérica f é a representação gráfica onde cada um desses pares ordenados é mostrado como um **ponto do plano cartesiano.**
Discutiremos os detalhes dos gráficos de funções no estudo das funções do 1° e do 2° graus.

Função do 1° Grau

Denominamos função do primeiro grau a qualquer função **f: R** $\to$ **R**, tal que:

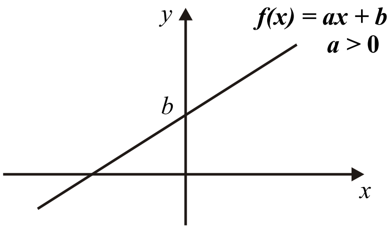
f(**x**) = **ax + b** (com **a** $\neq$ 0)

O gráfico de uma função do 1° grau é sempre uma **reta inclinada** que encontra o eixo vertical quando y = b.

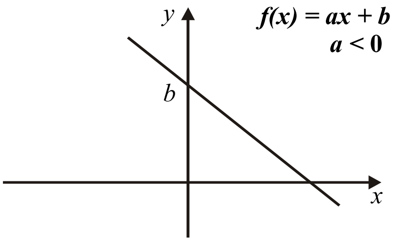
O valor constante **b** da expressão **ax + b** é chamado **coeficiente linear.**

O coeficiente **a** da expressão **ax + b** é chamado **coeficiente angular** e está associado ao **grau de inclinação** que a reta do gráfico terá (na verdade o valor de **a** é igual à tangente de um certo ângulo que a reta do gráfico forma com o eixo horizontal).

Se a > 0 a função será **crescente,** ou seja, quanto **maior** for o valor de **x, maior** será também o valor correspondente de **y** e o gráfico vai ficando mais **alto** para a direita.



Se a < 0 a função será **decrescente,** ou seja, quanto **maior** for o valor de x, **menor** será o valor correspondente de **y** e o gráfico vai ficando mais baixo para a direita.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. O gráfico da função f(x) = 3x - 9 encontra o eixo das abscissas (horizontal) quando **x** é igual a
a) -9
b) -3
c) 0
d) 3
e) 9

2. O gráfico da função f(x) = -2x -14 encontra o eixo das ordenadas (vertical) quando y é igual a
a) -14
b) -7
c) 0
d) 7
e) 14

3. A função do primeiro grau f(x) = **a**x + 8 é crescente e encontra o eixo das abscissas (horizontal) quando **x** é igual a - 4. Então o valor de **a** é:
a) -4
b) -2
c) 2
d) 4
e) 8

4. Considere que a função do primeiro grau definida por f(x) = **a**x + 10 seja crescente. Assinale a opção que indica um valor impossível para a raiz desta função.
a) -25
b) –4
c) -3 π
d) –2
e) 4

5. (CESCEM) Para que os pares (1; 3) e (3; -1) pertençam ao gráfico da função dada por f (x) = ax + b, o valor de b - a deve ser:
a) 7
b) 5
c) 3
d) -3
e) -7

6. Uma função real **f** do 1° grau é tal que f (0) = 1 + f (1) e f (-1) = 2 - f (0). Então, f (3) é:
a) -3

b) $-\frac{5}{2}$
c) –1
d) 0
e) $\frac{7}{2}$

7. Para que a função do 1° grau dada por f (x) = (2 - 3k) x + 2 seja crescente devemos ter:
a) $k = \frac{2}{3}$
b) $k =< \frac{2}{3}$
c) $k > \frac{2}{3}$
d) $k < -\frac{2}{3}$
e) $k > -\frac{2}{3}$

8. (UnB/95-STJ) Um passageiro recebe de uma companhia aérea a seguinte informação em relação à bagagem a ser despachada: por passageiro, é permitido despachar gratuitamente uma bagagem de até 20kg; para qualquer quantidade que ultrapasse os 20kg, será paga a quantia de R$ 8,00 por quilo excedente. Sendo P o valor pago pelo despacho da bagagem, em reais, e M a massa da bagagem, em kg, em que M > 20, então:
a) P = 8M
b) P = 8M - 20
c) P = 20 - 8M
d) P = 8(M - 20)
e) P = 8(M + 20)

FUNÇÃO DO 2º GRAU

Denominamos função do segundo grau a qualquer função f: **R** $\rightarrow$ **R**, tal que:

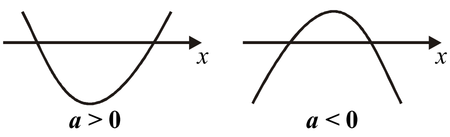
f(**x**) = ax^2 + b**x** + c(com $\neq$ 0)

Os gráficos das funções do 2° grau são sempre **parábolas**.

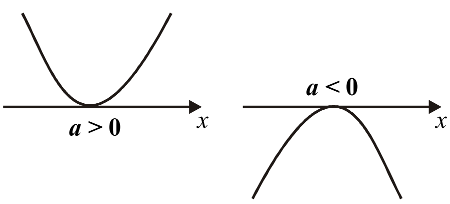
O que é exatamente uma parábola? As parábolas são curvas especiais construídas de uma tal maneira que cada um dos infinitos pontos que formam a parábola ficam à mesma distância de uma certa reta (reta diretriz da parábola) e de um certo ponto (foco da parábola) que está fora da reta diretriz.

Na função f(x) = ax^2 + bx + c, o valor $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado **discriminante** da expressão quadrática. Dependendo do sinal do discriminante (Δ) e também do sinal de **a**, teremos uma das seis situações descritas abaixo, que mostram a posição da parábola em relação ao eixo horizontal:

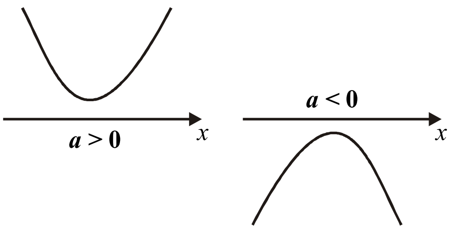
1ª- Se $\Delta > 0$ há **duas raízes reais** e a parábola encontrará o eixo horizontal (x) em dois pontos distintos (que são as raízes de ax^2 + b**x** + c = 0).



2ª- Se $\Delta = 0$ há **uma só raiz real** e a parábola encontrará o eixo horizontal em um único ponto (que é a única raiz de ax^2 + b**x** + c = 0).

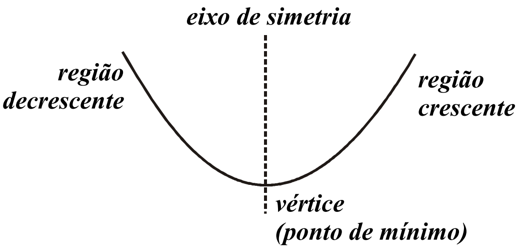


3ª - Se $\Delta < 0$ **não há raízes reais** e o gráfico não encontrará o eixo horizontal.



Vértice da Parábola

O vértice de uma parábola é um ponto da parábola com várias características interessantes. Ele será o ponto mais alto (ponto de máximo) ou o ponto mais baixo (ponto de mínimo) da parábola. Além disto, o vértice da parábola divide a parábola em duas partes, sendo uma crescente e outra decrescente.



Coordenadas do Vértice

As coordenadas do vértice podem ser obtidas com as seguintes expressões:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Uma forma alternativa de se conseguir estas coordenadas é fazendo:

1° - Conhecidas as raízes da função, o **x** do vértice pode ser calculado como a **média aritmética das raízes** da função.

$$x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

2° - Conhecido o valor de **x**, pode-se calcular o **y** do vértice como o valor que a função assume para **x = x_y:**

$$y_v = a(x_v)^2 + b(x_v) + c$$

O vértice da parábola será:
- ponto de **mínimo** sempre que **a** > 0;
- ponto de **máximo** sempre que **a** < 0.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. A função do segundo grau $f(x) = x^2 + bx + c$ encontra o eixo horizontal para x = 2 e para x = 5. Então os valores de **b** e de **c** são, respectivamente:
a) -7 e -10
b) 7 e 10
c) -7 e 10
d) 7 e -10
e) 10 e 7

2. O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + 9$ encontra o eixo das abscissas em um único ponto. Então o valor de **b** é:
a) ± 36
b) ± 6
c) 36
d) 6
e) - 6

3. As raízes de $f(x) = 2x^2 + bx + c$ têm sinais opostos. Logo:
a) $b^2 - 8c$ é igual a zero.
b) $b^2 - 8c$ é negativo.
c) $c < 0$.
d) $b < 0$.
e) $b < c$.

4. As raízes de $f(x) =-3x^2 + bx + c$ são positivas e distintas. Logo:
a) $b^2 - 8c$ é igual a zero.
b) $b^2 - 8c$ é negativo.
c) $c > 0$.
d) $b > 0$.
e) $b < c$.

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

GRÁFICOS

O objetivo da apresentação de dados na forma gráfica é facilitar a compreensão e a comparação dos mesmos - *uma imagem vale mais que mil palavras.* Sendo assim, os gráficos devem realçar as diferenças de magnitude entre as grandezas, propiciando uma representação global, dinâmica e agradável dos dados.
Na composição de um gráfico podem ser utilizadas as mais diversas formas, cores e estilos, como se pode observar freqüentemente lendo jornais, e revistas. Entretanto, alguns tipos de gráficos ajustam-se melhor a determinadas situações que outros.

Classificação dos gráficos

Quanto à forma:
- de pontos
- de linhas
- de superfícies
- pictogramas (figuras)
- estereogramas (tridimensionais)
- cartogramas (mapas)

Quanto à função:
• gráficos de informação:
- colunas ou barras
- porcentagens complementares
- composição (retangular ou de setores)
- cartograma
- pictograma
- estereograma

• gráficos de análise:
- histograma
- polígono de freqüências
- curva de freqüência
- ogiva
- diagrama cartesiano
- curva de Lorenz

• de controle:
- gráfico em "Z"
- de ponto de equilíbrio

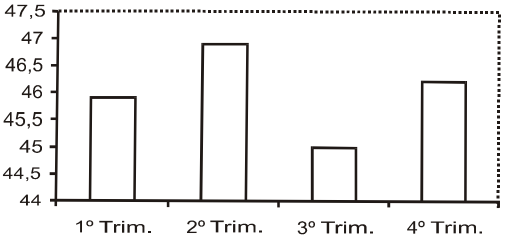
Detalharemos a seguir alguns dos gráficos mais utilizados.

Gráficos em Barras e em Colunas

São gráficos que comparam grandezas por meio de retângulos de mesma largura e de comprimentos diretamente proporcionais a estas grandezas.
Geralmente estes gráficos são usados em séries temporais, geográficas, especificativas ou em distribuições de freqüência onde a variável não é numérica ou é numérica inteira.
Quando as legendas dos retângulos forem **breves**, os retângulos poderão ser dispostos **verticalmente** originando o **gráfico em colunas**.

Exemplo:

Volume negociado na bolsa de valores de São Paulo – 1993
(R$ milhões)

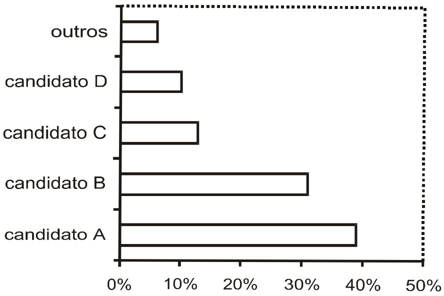


(Dados fictícios)

Quando as legendas das bases forem **longas**, os retângulos poderão ser dispostos **horizontalmente**, originando o **gráfico de barras**.

Exemplo:

Percentuais das intenções de voto em 20/07/82 (dados fictícios**)**

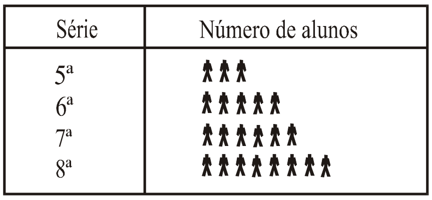


Pictogramas

Os pictogramas são gráficos que usam figuras para representar quantidades.

Observe o pictograma seguinte:

Número de alunos de 5ª a 8ª série do 1° grau matriculados no colégio X em 1998.



Legenda:  = 50 alunos

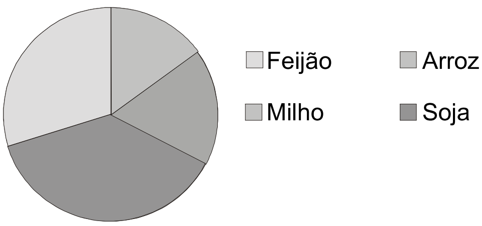
A legenda explica que cada símbolo  representa uma contagem de 50 alunos. Assim, este pictograma mostra contagens de 150 alunos na 5ª série, 250 na 6ª série, 300 na 7ª e 400 na 8ª .

Gráficos de Setores

Os gráficos de setores são gráficos de superfícies representados por um círculo que é subdividido em regiões (setores), tais que as áreas das regiões representadas sejam proporcionais aos números que desejamos indicar.

Exemplo:

Produção anual de grãos no interior paulista em 1970



Uma das vantagens do gráfico de setores é que ele permite identificar facilmente as proporções entre os diversos valores nele representados e o todo.

Gráficos de Linhas

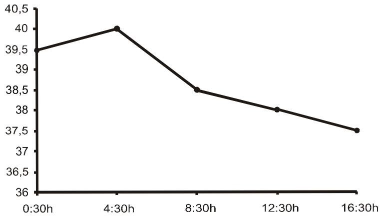
Denominam-se gráficos de linhas (ou de retas) àqueles onde uma linha poligonal indica as variações nos valores de um determinado fenômeno que é observado em intervalos regulares de tempo.

Exemplo:

A tabela seguinte mostra as temperaturas de um paciente tomadas de 4 em 4 horas ao longo de um dia:

Hora	0.30h	4.30h	8.30h	12.30	16.30
Temperatura (ºC)	39,5	40,0	38,5	38,0	37,5

0 gráfico de linhas correspondente seria:



Os vértices da linha poligonal indicam os valores das temperaturas observadas.

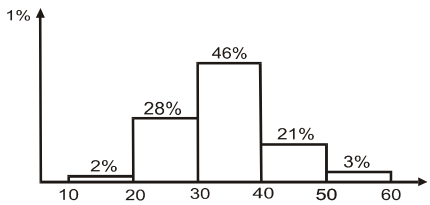
Os pontos de cada um dos segmentos que se encontram entre dois vértices seguidos da poligonal indicam estimativas das temperaturas entre duas observações consecutivas. Deste modo, observando o gráfico podemos estimar que a temperatura do paciente às 6.30h deveria estar próxima dos 39 graus.

Histogramas

São gráficos de superfícies utilizados para representar distribuições de freqüências com dados agrupados em classes.
O histograma é composto por retângulos justapostos (denominados células), cada um deles representando um conjunto de valores próximos (as classes).
A largura da base de cada célula deve ser proporcional à amplitude do intervalo da classe que ela representa e a área de cada célula deve ser proporcional à freqüência da mesma classe.
Se todas as classes tiverem igual amplitude, então as alturas dos retângulos serão proporcionais às freqüências das classes que eles representam.
Considere a distribuição de freqüências apresentada a seguir e observe o histograma obtido a partir dela:

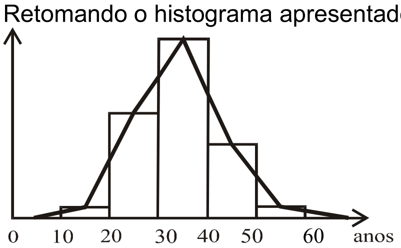
Distribuição das idades dos funcionários da empresa J.L. em 01/01/98

Idades (anos)	Freqüências relativas simples
10 ├── 20	2%
20 ├── 30	28%
30 ├── 40	46%
40 ├── 50	21%
50 ├── 60	3%



Polígono de Freqüências

O polígono de freqüências é o gráfico que obtemos unindo pontos dos lados superiores dos retângulos de um histograma por meio de segmentos de reta consecutivos.
Retomando o histograma apresentado no item anterior, obtemos o seguinte polígono de freqüências:



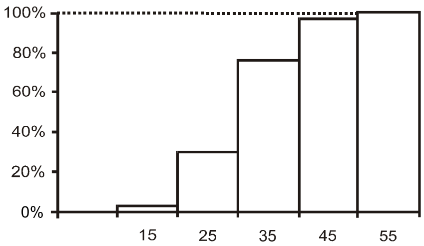
Ogivas

Chamamos de ogivas aos gráficos que indicam freqüências acumuladas, ou seja, aqueles que indicam quantos casos estão acima de um certo valor ou quantos estão abaixo de um certo valor. As freqüências acumuladas podem ser apresentadas na forma absoluta (quantos casos) ou na forma relativa (proporção).

Consideremos a tabela de distribuição de freqüências de idades que foi dada anteriormente. Calculando as freqüências relativas acumuladas abaixo de cada limite de classe (freqüências acumuladas crescentes) teremos:

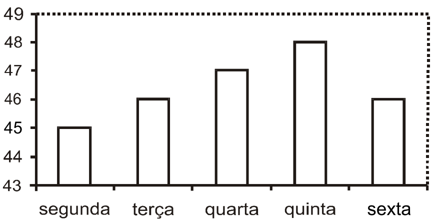
Idades (anos)	Freqüências relativas simples (%)	Freqüências relativas acumuladas crescentes
10 ├— 20	2%	2%
20 ├— 30	28%	30%
30 ├— 40	46%	76%
40 ├— 50	21%	97%
50 ├— 60	3%	100%

O histograma construído com estas freqüências acumuladas nos dá a seguinte ogiva crescente:



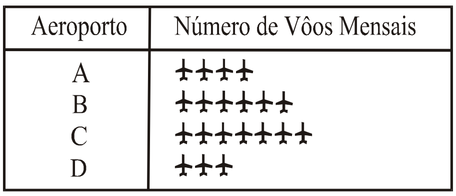
EXERCÍCIOS

1. O gráfico seguinte representa os volumes negociados numa bolsa de valores, em milhões de reais, durante os cinco dias úteis de uma determinada semana:



Qual foi, em milhões de reais, o volume médio diário negociado nestes cinco dias?

2. O gráfico abaixo representa o número médio de vôos mensais em quatro aeroportos:



Legenda: ✈ = 250 vôos

Com base nestas informações, pode-se afirmar que o aeroporto C é responsável por qual percentual de vôos em relação ao total de vôos destes quatro aeroportos?

Médias

Média Aritmética Simples ($\bar{x}$)

Dada uma seqüência com **n** valores numéricos, (x_1, x_2, x_3, ..., x_n,), denominamos média aritmética desses **n** valores à razão:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Exemplo:

Determine a média aritmética do seguinte conjunto de valores: (4, 10, 12, 12, 28, 30)

Solução:

$$\bar{x} = \frac{4 + 10 + 12 + 12 + 28 + 30}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

Média Aritmética Ponderada

Dadas duas seqüências com **n** valores numéricos, (x_1, x_2, x_3, ..., x_n,) e (p_1, p_2, P_3,..., p_n), denominamos média aritmética dos valores x_i ponderados pelos pesos p_i à razão:

$$\bar{x} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Exemplo:
A tabela abaixo descreve a pontuação obtida por um candidato em cada uma das cinco disciplinas que compunham a prova de um determinado concurso público. A nota final do candidato deverá ser calculada como a média aritmética dos pontos obtidos em cada uma das disciplinas da prova, ponderados pelos respectivos pesos indicados na mesma tabela.
Nestas condições, qual a nota final do candidato?

Disciplinas	Pontuação	Peso
Português	8,2	3
Matemática	6,4	2
Dir. Constitucional	7,5	2
Dir. Administrativo	7,2	2
Contabilidade	6,7	3

Solução:
A nota final do candidato deverá ser a média aritmética ponderada das pontuações obtidas em cada uma das disciplinas pelos respectivos pesos de cada disciplina. Assim, teremos:

Nota final = $\frac{3 \text{ x } 8{,}2 + 2 \text{ x } 6{,}4 + 2 \text{ x } 7{,}5 + 2 \text{ x } 7{,}2 + 3 \text{ x } 6{,}7}{3 + 2 + 2 + 2 + 3} = \frac{86{,}9}{12} \cong 7{,}24$

Média Aritmética em Tabelas com Valores Agrupados por Faixas

Em determinadas situações pode ser muito útil resumir uma lista numérica extensa numa tabela na qual os valores são organizados por faixas às quais se associam o total de valores da lista ocorridos em cada faixa.

Exemplo:
Observe a tabela abaixo que representa a distribuição das idades de 50 pessoas, organizada por faixas de idade:

Idades (anos)	Número de Casos Observados
10 ⊢ 20	1
20 ⊢ 30	14
30 ⊢ 40	23
40 ⊢ 50	10
50 ⊢ 60	2

A contagem do total de valores ocorridos em cada faixa é denominada **freqüência** da faixa e a tabela assim construída é denominada **distribuição de freqüências**.

As freqüências das faixas podem, eventualmente, ser apresentadas em termos percentuais.

O cálculo da média aritmética numa tabela como esta é feito por um processo aproximativo que descreveremos a seguir:

Exemplo:
Determinar a média aritmética das idades apresentadas na tabela do exemplo anterior:

Solução:
O cálculo da média aritmética deverá usar os portos médios de cada uma das faixas de valores, ponderados pelas respectivas freqüências.

Cada ponto médio é obtido calculando-se a média aritmética entre os limites de sua faixa:

$X_1 = 15, X_2 = 25, X_3 = 35, X_4 = 45$ e $X_5 = 55$

Assim, a média aritmética das idades será:

$$\bar{x} = \frac{\sum(f_i \cdot x_i)}{n} = \frac{1 \text{ x } 15 + 14 \text{ x } 25 + 23 \text{ x } 35 + 10 \text{ x } 45 + 2 \text{ x } 55}{50} = \frac{1.730}{50} = 34{,}6 \text{ anos}$$

Propriedades da Média Aritmética

1ª Se adicionarmos (ou subtrairmos) uma mesma constante a todos os valores de uma seqüência numérica, a média aritmética da nova seqüência obtida será igual à média aritmética da seqüência original adicionada (ou subtraída) da mesma constante.

Exemplo:
Calcular a média aritmética da seqüência de valores (5, 15, 25, 35, 75).

Solução:
Subtraindo 5 de cada um dos valores da seqüência, obteremos (0, 10, 20, 30, 70) cuja média aritmética é:

$$\bar{x} = \frac{0 + 10 + 20 + 30 + 70}{5} = \frac{130}{5} = 26$$

Como os valores da seqüência original são todos 5 unidades maiores, sua média aritmética será:

$$\bar{x} = 26 + 5 = 31$$

2ª Se multiplicarmos (ou dividirmos) por uma mesma constante todos os valores de uma seqüência numérica, a média aritmética da nova seqüência obtida será igual à média aritmética da seqüência original multiplicada (ou dividida) pela mesma constante.

Exemplo:
Calcular a média aritmética da seqüência de valores (1,7; 3,2; 4,5; 4,6)

Solução:
Multiplicando por 10 os valores da seqüência, obteremos (17, 32, 45, 46) cuja média aritmética é:

$$\bar{x} = \frac{17 + 32 + 45 + 46}{4} = \frac{140}{4} = 35$$

Como os valores da seqüência original são todos 10 vezes menores, sua média aritmética será:

$$\bar{x} = 35 \div 10 = 3{,}5$$

3ª Se uma lista com $\mathbf{n_1}$ valores numéricos tem média aritmética $\bar{x}_1$ e uma outra com $\mathbf{n_2}$ valores numéricos tem média aritmética $\bar{x}_2$ então a lista composta pelos $\mathbf{n_1}$ valores da primeira juntamente com os $\mathbf{n_2}$ valores da segunda tem média aritmética igual a

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot \bar{x}_1 + n_2 \cdot \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Exemplo:

Uma lista de 20 valores tem média aritmética igual a 6 e uma outra, de 30 valores tem média aritmética igual a 8. Qual a média aritmética dos 50 valores das duas listas juntas?
Solução:

Devemos calcular a média aritmética entre 6 e 8, com pesos 20 e 30, respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{20 \text{ x } 6 + 30 \text{ x } 8}{20 + 30} = \frac{360}{50} = 7{,}2$$

4ª Seja **d** = **x - k** o desvio do valor **x** calculado em relação à constante **k**. A soma dos desvios de todos os valores **x** de uma seqüência, calculados em relação a uma constante **k** será igual a zero se e somente se **k** for igual à média aritmética da seqüência.

$$\sum (x_i - k) = 0 \Leftrightarrow k = \bar{x}$$

Exemplo:
Na seqüência (31, 37, 39, 42, 56) a média aritmética é igual a 41.

Calculando os desvios de cada um dos valores em relação à média da seqüência, obtemos:
31-41 = **-10**, 37-41 = **-4**, 39-41 = **-2**, 42-41 = **+1** e 56-41 = **+15**

Como se pode conferir, a soma dos desvios é igual a **zero**.

$\sum (\mathbf{d})$ =(-10)+(-4)+(-2)+(+1)+(+15) = 0

EXERCÍCIOS - MÉDIA

1. (IDR-DF/AFCE) Uma repartição pública realizou ume tomada de preços antes de adquirir uma grande quantidade de grampeadores de mesa. Seis fornecedores apresentaram propostas com preços unitários de: 12; 12; 10; 8; 9 e 9 Reais, respectivamente. Pode-se afirmar que a média destes preços é:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

2. O valor 50 é a média aritmética da série:
a) 20, 30, 40, 50, 60;
b) 20, 50, 50, 60, 80;
c) 20, 50, 50, 60, 70;
d) 20, 50, 70, 80, 90.

3. (ESAF/TTN) Em uma corretora de valores foram negociados os seguintes títulos:

DESCRIÇÃO	QUANTIDADE
TÍTULOS DE CR$ 20.000	18
TÍTULOS DE CR$ 10.000	8
TÍTULOS DE CR$ 4.000	2

Corretamente calculado, o valor médio dos títulos negociados é:
a) Cr$ 15.000;
b) Cr$ 16.000;
c) Cr$ 14.000;
d) Cr$ 13.000;
e) Cr$ 12.000.

4. (Metrô-DF) Considere a tabela abaixo, que representa as notas finais obtidas por 30 alunos de uma classe, em um exame de Língua Portuguesa.

NOTAS	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Nº DE ALUNOS	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

A média aritmética da turma é:

a) 4,2
b) 4,5
c) 4,6
d) 4,7
e) 5,0

5. Dados os conjuntos A (1, 2, 3, 4, 5) e B (202, 204, 206, 208, 210). É correto afirmar que:
a) as médias aritméticas de A e B são iguais;
b) a média aritmética de A é 201 unidades menor que a de B;
c) o dobro da soma de 100 com a média aritmética de A, é igual à média aritmética de B;
d) se somarmos 200 unidades à média aritmética de A obteremos a média aritmética de B;
e) a média aritmética de A é 202 vezes menor que a de B.

6. (ESAF/TTN) De acordo com a tabela abaixo, pode-se afirmar que:

Pesos (kg)	Freqüências simples absolutas
2 ⊢ 4	9
4 ⊢ 6	12
6 ⊢ 8	6
8 ⊢ 10	2
10 ⊢ 12	1

A média aritmética dos pesos é, aproximadamente:
a) 5,30kg;
b) 5,27kg;
c) 5,24kg;
d) 5,21 kg;
e) 5,19kg

7. As notas dos três primeiros bimestres de um aluno, em determinada disciplina, são: 5,4 e 7. Sabendo que a nota final anual é a média aritmética simples das notas obtidas pelo aluno nos quatro bimestres, qual deverá ser a nota do quarto bimestre para que a sua nota final anual seja 6?
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

8. Num determinado concurso a nota final é determinada calculando-se a média aritmética simples das notas obtidas em cada uma de cinco provas. Inicialmente, a nota final de um candidato foi calculada resultando 43, mas após os recursos, o candidato teve suas notas nas provas de Português e Matemática aumentadas em 2 pontos e 1 ponto, respectivamente, sendo, deste modo, sua nota final recalculada. Com base nestas informações, pode-se concluir que a nota final correta deste candidato foi:
a) 43,3
b) 43,4
c) 43,5
d) 43,6
e) 43,7

9. O regulamento de um torneio de tiro ao alvo prevê que a pontuação final de cada competidor será obtida desprezando-se a menor pontuação obtida dentre as seis séries de dez tiros que ele deve realizar e calculando-se a média aritmética das cinco pontuações restantes. A menor pontuação obtida por um certo competidor foi de 173 pontos, embora a média aritmética das seis séries de disparos que ele realizou tenha sido de 253 pontos. Deste modo, a pontuação final deste competidor foi:
a) 265 pontos
b) 266 pontos
c) 267 pontos
d) 268 pontos
e) 269 pontos

10. Um aluno obteve, em determinada disciplina, as seguintes notas bimestrais: 5 no primeiro bimestre, 4 no segundo e 7 no terceiro. Sabendo que a nota final anual é a média aritmética ponderada das notas obtidas pelo aluno nos quatro bimestres, com pesos 1, 2, 3 e 4 do primeiro até o quarto bimestre, respectivamente , qual deverá ser a nota do quarto bimestre para que a sua nota final anual seja 6?
a) 6,5
b) 7,0
c) 7,5
d) 8,0

e) 8,5

11. A média aritmética de um conjunto com 20 elementos é 32 e a média aritmética de um outro com 80 elementos é 70. Então, a média aritmética dos elementos dos dois conjuntos reunidos é igual a:
a) 62,4
b) 51,0
c) 46,5
d) 41,0
e) 38,3

12. Num dado concurso, 60% dos candidatos eram do sexo masculino e obtiveram, em média, 70 pontos em determinada prova. Sabe-se que a média geral dos candidatos (homens e mulheres) naquela prova foi de 64 pontos. Qual foi a média de pontos das mulheres na mesma prova?
a) 55
b) 35
c) 64
d) 60
e) 68

13. Ao calcular as médias aritméticas das notas obtidas pelos candidatos nas provas de um concurso, foram constatados os seguintes resultados:

média dos candidatos do
sexo masculino: .... 78 pontos
média dos candidatos do
sexo feminino:.. 83 pontos
média geral dos candidatos: .... 80 pontos

Com base nestas informações, pode-se afirmar que:

a) houve erro no cálculo de uma das três médias;
b) os homens representam 40% do total de candidatos;
c) as mulheres representam 40% do total de candidatos;
d) a média das mulheres é maior porque elas estão em maior número;
e) a média geral só foi possível porque 50% dos candidatos eram do sexo masculino e 50%, do sexo feminino.

Moda (MO)
Dada uma série estatística qualquer, chamamos de moda ou valor modal o valor da série para o qual se verifica a maior freqüência simples.
No caso de dados numéricos, o conceito de moda é estendido para qualquer valor do rol que apresente freqüência simples maior que as dos valores vizinhos a ele. Dizemos que tais valores estão associados a picos de freqüência.
Deste modo, uma lista de dados numéricos pode, eventualmente, apresentar uma única moda (unimodal), duas modas (bimodal) ou mais (multimodal), podendo também não ter moda (amodal).
A determinação de valores modais deve ser evitada quando o número de observações é pequeno. No entanto, objetivando esclarecer o conceito de moda, são comuns as ilustrações que utilizam listas pequenas.

Exemplos:
- A série (2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8) é unimodal: Mo = 3
- A série (10, 11, 11, 13, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 16) tem duas modas, 13 e 15, sendo por isso denominada série bimodal.
- A série (3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7) não tem moda, sendo denominada série amodal.

Determinação da Moda no Caso de Dados Agrupados

Considere a distribuição de freqüências das idades de um grupo de 120 indivíduos:

Idades (anos)	N" de Indivíduos
10 ⊢ 15	8
15 ⊢ 20	22
20 ⊢ 25	**34**
25 ⊢ 30	26
30 ⊢ 35	15
35 ⊢ 40	11
40 ⊢ 45	4

Assumimos que a moda está compreendida na classe 20 ⊢ 25 pois é a que reúne o maior número de indivíduos. Esta classe é denominada classe modal, enquanto a freqüência simples da mesma é chamada de freqüência modal.

É muito importante observarmos que, numa tabela com dados agrupados em classes, a determinação da classe modal a partir da comparação direta dos valores das freqüências simples só é possível quando todas as classes tiverem a mesma amplitude. Este é o caso mais comum, sendo, aliás, o único citado pela grande maioria dos autores.
Caso as classes tivessem amplitudes distintas, a determinação da classe modal deveria levar em conta a **densidade** de cada classe, que é determinada dividindo-se a freqüência simples da mesma pela sua amplitude.
Apresentaremos, a seguir, três métodos distintos de determinação da moda.

Moda Bruta
A moda bruta é o ponto médio da classe modal.
Portanto, para a distribuição de freqüências apresentada anteriormente, a moda bruta é 22,5 anos, pois este é o ponto médio do intervalo 20 I— 25, que é o intervalo da classe modal.
Embora seja bastante simples, o cálculo da moda bruta é muito impreciso, pois não considera a influência das freqüências das classes vizinhas sobre o valor da moda.

Fórmula de Czuber
A fórmula de Czuber é considerada a mais precisa para o cálculo da moda numa tabela com dados agrupados em classes. Nela, consideram-se as variações das freqüências das classes vizinhas à classe modal em relação à freqüência da própria classe modal.
Dada uma distribuição de freqüências com dados agrupados em classes de mesma amplitude, a determinação da moda, pela fórmula de Czuber, será obtida pela expressão:

$$\text{Mo} = \lambda_{\text{mo}} + \text{c} \cdot \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)$$

onde: λ_{mo} = limite inferior da classe modal.
c = amplitude do intervalo da classe modal.
Δ_1 = diferença entre as freqüências simples das classes modal e anterior à modal.
Δ_2 = diferença entre as freqüências simples das classes modal e posterior à modal.

Na distribuição apresentada anteriormente, temos:

λ_{mo} = 20
c = 5
Δ_1 = 34 - 22 = 12
Δ_2 = 34 - 26 = 8

Portanto:

$$\text{Mo} = 20 + 5 \cdot \left(\frac{12}{12+8} \right)$$

$$\text{Mo} = 20 + 5 \cdot \frac{12}{20}$$

$$\text{Mo} = 20 + \frac{60}{20}$$

$$\text{Mo} = 20 + 3 = 23 \text{ anos}$$

(Compare o resultado obtido com o valor da moda bruta, observando a diferença)

Fórmula de King
A fórmula de King baseia-se apenas na influência das freqüências das classes adjacentes à classe modal sobre o valor da moda, não considerando a freqüência da própria classe modal. É menos precisa que a fórmula de Czuber, devendo, portanto, o seu uso ficar restrito aos casos onde seja expressamente pedida.
Dada uma distribuição de freqüências com dados agrupados em classes, a determinação da moda, pela fórmula de King, será dada pela expressão:

$$\text{Mo} = \lambda_{\text{mo}} + \text{c} \cdot \left(\frac{f_{\text{pos}}}{f_{\text{ant}} + f_{\text{pos}}} \right)$$

onde: λ_{mo} =limite inferior da classe modal.
c = amplitude do intervalo da classe modal.
f_{ant} = freqüência da classe **anterior** à classe modal.
f_{pos} = freqüência da classe **posterior** à classe modal.

No mesmo exemplo usado anteriormente, temos:

$\lambda_{mo} = 20$

$c = 5$

$f_{ant} = 22$

$f_{pos} = 26$

Assim, a fórmula de King nos dá:

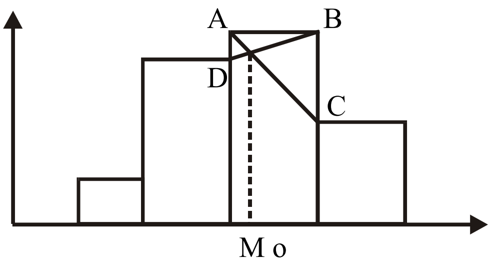
$$\mathrm{Mo} = 20 + 5 \cdot \left(\frac{26}{22+26} \right)$$
$$\mathrm{Mo} = 20 + 2{,}708...$$
$$\mathrm{Mo} \cong 22{,}7 \text{ anos}$$

(Compare também este resultado com os valores obtidos com as fórmulas de Czuber e da moda bruta)

Determinação Gráfica da Moda

Pode-se determinar graficamente a posição da moda no histograma representativo de uma distribuição de freqüências simples.

O método descrito a seguir é o equivalente geométrico da fórmula de Czuber.



1º A partir dos vértices superiores do retângulo correspondente à classe modal (A e B), traçamos os segmentos concorrentes AC e BD, ligando cada um deles ao vértice superior adjacente do retângulo correspondente a uma classe vizinha, conforme ilustrado na figura.

2° A partir da interseção dos segmentos AC e BD, baixamos uma perpendicular ao eixo horizontal, determinando o ponto Mo que indica a moda.

Mediano (M_d)

Mediana é o valor que separa um rol em duas partes com a mesma quantidade de ocorrências.

A mediana, portanto, será sempre um número que, num conjunto **ordenado** de dados, tenha 50% dos valores menores ou iguais a ele, sendo os outros 50% maiores ou iguais a ele. Ocupa, quanto ao número de elementos do rol, uma posição central no mesmo.

Cálculo da Mediana numa Série com Dados Não Agrupados

I - Quando a quantidade de dados for ímpar:

Neste caso a mediana será o valor do dado que, no rol, tem a mesma quantidade de ocorrências antes e depois de si.

Exemplo:

Na série (5,10,15,**16**,20,40,40) a mediana é 16.

II - Quando a quantidade de dados for par:

Neste caso a mediana será a média aritmética dos dois valores mais centrais do rol, quanto ao número de ocorrências.

Exemplo:

Na série (13, 15,**17**, **19**, 25, 30) os dois valores mais centrais do rol são 17 e 19, sendo 18 a média aritmética entre eles. Assim, a mediana é 18.

Note que, neste caso, a mediana é um valor teórico, isto é, que não pertence realmente ao rol.

Cálculo da Mediana numa Distribuição com Dados Agrupados em Classes

Dada uma distribuição de freqüências com dados agrupados em classes, o valor da mediana pode ser obtido com a seguinte expressão:

$$Md = \lambda_{md} + c \cdot \left(\frac{\Delta}{f_{md}} \right)$$

onde: λ_{md} = limite inferior da classe mediana, isto é, da 1ª classe que apresentar freqüências acumuladas maiores ou iguais a 50%

c = amplitude do intervalo da classe mediana

f_{md} = freqüência simples da classe mediana

Δ = parcela da f_{md} necessária para acumular 50% na classe mediana

Exemplo:
A tabela abaixo apresenta a distribuição das alturas de 26 pés de certo arbusto, aos quatro meses de idade. Determinar a altura mediana desta distribuição.

Alturas (cm)	Freqüências simples
50 ⊢ 60	2
60 ⊢ 70	5
70 ⊢ 80	8
80 ⊢ 90	7
90 ⊢ 100	4

Solução:

1° A mediana deve ter 50% das ocorrências menores ou iguais a ela. Como o total de ocorrências da tabela acima é 26 devemos ter:

50% de 26 = 13 ocorrências

2° Na prática, em vez de calcularmos as freqüências acumuladas crescentes e as decrescentes, podemos tomar a primeira classe que apresentar freqüência acumulada crescente com pelo menos 50% das ocorrências. No nosso exemplo, 13 ou mais ocorrências.

Alturas (cm)	Freqüências simples	Freqüências acumuladas
50 ⊢ 60	2	2
60 ⊢ 70	5	7
70 ⊢ 80	f_{md} = 8	**15**
80 ⊢ 90	7	22
90 ⊢ 100	4	26

Podemos observar na tabela acima que a classe mediana será a terceira, pois ali encontramos o primeiro valor de freqüência acumulada crescente com pelo menos 50% das ocorrências.

3° O valor de Δ é o valor que deveríamos ter na freqüência simples da classe mediana para conseguir uma freqüência acumulada de 50% (13 ocorrências, em vez das 15 que ali encontramos):

Alturas (cm)	Freqüências simples	Freqüências acumuladas
50 ⊢ 60	2	2
60 ⊢ 70	5	7
70 ⊢ 80	**Δ A=6**	**13**
80 ⊢ 90	-	-
90 ⊢ 100	-	-

4° Resumindo os valores encontrados e substituindo-os na fórmula que nos dá a mediana temos:

λ_{md} = 70

c = 10

f_{md} = 8

Δ = 6

$$\mathrm{Md} = 70 + 10 \cdot \left(\frac{6}{8}\right)$$

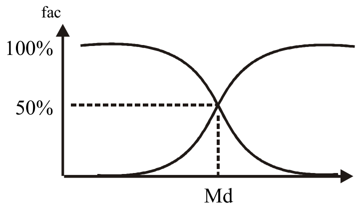
$$\mathrm{Md} = 70 + 7{,}5$$

$$\mathrm{Md} = 77{,}5 \text{ centímetros}$$

Determinação Gráfica da Mediana

Uma vez, que os números de elementos **abaixo** e **acima** da mediana são iguais, podemos concluir que a mediana é o valor para o qual as freqüências acumuladas **crescente** e **decrescente** são iguais, o que nos permite localizar graficamente a mediana utilizando as ogivas, que são os gráficos que registram as freqüências acumuladas, conforme observamos abaixo.

Ogivas - Crescente e Decrescente

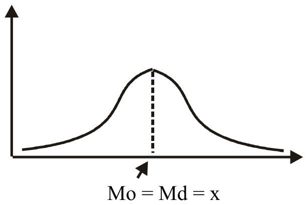


A linha vertical traçada a partir do ponto de cruzamento das duas ogivas, indica a localização da mediana sobre o eixo da variável.

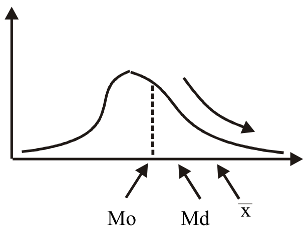
Posições Relativas entre Média Aritmética, Moda e Mediana

Dada uma distribuição de freqüências unimodal, uma, e somente uma, das três situações abaixo ocorrerá:

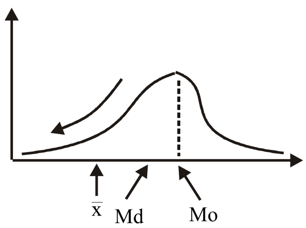
1° A distribuição é simétrica - neste caso, teremos um mesmo valor para a média aritmética, a moda e a mediana.



2° A distribuição é assimétrica à direita - neste caso, a média aritmética será maior que a mediana e esta, maior que a moda.



3° A distribuição é assimétrica à esquerda - neste caso, a média aritmética será menor que a mediana e esta, menor que a moda.



Relação de Pearson entre Média Aritmética, Moda e Mediana

Se uma distribuição de freqüências com dados agrupados em classes for unimodal e pouco assimétrica, então pode ocorrer a seguinte relação:

$$\bar{x} - Mo \cong 3 \cdot (\bar{x} - Md)$$

Interpretada graficamente, esta relação mostra que a distância da média aritmética até a moda é o triplo da distância da média aritmética até a mediana.
Por ser uma relação empírica, seu uso deve ficar restrito aos casos onde seja expressamente pedida.

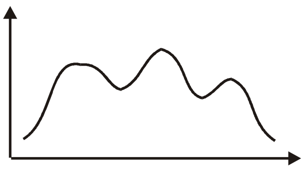
Propriedade das Medidas de Posição

1ª Se adicionarmos (ou subtrairmos) uma mesma constante a todos os valores de uma série, a média aritmética, a moda e as separatrizes (mediana, quartis, decis e centis) ficarão todas adicionadas (ou subtraídas) da mesma constante.

2ª Se multiplicarmos (ou dividirmos) por uma mesma constante todos os valores de uma série, a média aritmética, a moda e as separatrizes (mediana, quartis, decis e centis) ficarão todas multiplicadas (ou divididas) pela mesma constante.

EXERCÍCIOS - MODA

1. A curva "X" representa uma distribuição de freqüências:



a) bimodal;
b) amodal;
c) multimodal;
d) unimodal.

2. A empresa "Cerrado" distribuiu seus empregados nas faixas salariais abaixo, em salários mínimos:

Faixa Salarial (sal. mínimos)	Número de Empregados
1 |— 5	15
5 |— 9	40
9 |— 13	10
13 |— 17	5

O salário modal da empresa é aproximadamente
a) 7 salários mínimos.
b) 40 salários mínimos.
c) 6,82 salários mínimos.
d) 9 salários mínimos.

3. Na série (50, 80, 70, 50, 40), a moda será:
a) 40
b) 50
c) 56
d) 80

4. (ESAF/TTN) Dada a seguinte distribuição, onde f_i é a freqüência simples absoluta da i-ésima classe, então:

Classes	f_1
2 I— 4	2
4 I— 6	8
6 I— 8	10
8 I— 10	8
10 I— 12	4

a) a distribuição é simétrica e o número de classes é 5;
b) a distribuição é assimétrica e bimodal;
c) a média aritmética é 6,4;
d) por ser a maior freqüência, a moda é 10;
c) o ponto médio da 3ª classe e a moda são iguais.

5. (ESAF/TTN)De acordo com a distribuição de freqüência transcrita a seguir, pode-se afirmar que:

Diâmetro (cm)	Freqüências simples absolutas
4 I— 6	6
6 I— 8	8
8 I— 10	12
10 I— 12	10
12 I— 14	4

A moda da distribuição é aproximadamente igual a
a) 9,5 cm.
b) 9,7 cm.
c) 9,3 cm.
d) 9,6 cm.
c) 9,4 cm.

6. A série (40, 60, 70, 80, 90, 40, 70) é
a) amodal.
b) bimodal.
c) unimodal.
d) multimodal.

7. A moda bruta é
a) o ponto médio da classe central.
b) o ponto médio da classe de maior freqüência.
c) um ponto médio qualquer escolhido arbitrariamente.
d) nenhuma das respostas acima.

8. A moda de Czuber é calculada utilizando
a) todos os dados da distribuição.
b) os dados centrais da distribuição.
c) os dados que estão em torno da classe de maior freqüência.
d) os dados extremos.

9. Se as freqüências das classes adjacentes à classe modal forem iguais, poderemos afirmar que
a) a moda de Czuber será maior que a moda bruta.
b) a moda de Czuber será maior que a moda de King.
c) a moda bruta será igual à moda de Czuber.
d) a moda bruta será maior que a moda de King.

10. Se a freqüência da classe anterior à classe modal for maior que a freqüência da classe posterior à classe modal, poderemos afirmar que
a) a moda de King será menor que a moda de Czuber.
b) a moda de Czuber será menor que a moda de King.
c) a moda de King será menor que a moda bruta.
d) as modas de King, Czuber e bruta serão iguais.

EXERCÍCIOS - MEDIANA
1. Na série (15, 20, 30, 40, 50) há, abaixo da mediana

a) 2 valores.
b) 3 valores.
c) 3,5 valores.
d) 4 valores.

2. Na série (10, 20, 40, 50, 70, 30, 0), a mediana será:
a) 20
b) 30
c) 40
d) 50

3. (IDR-DF/AFCE) Um órgão público divide suas despesas em doze rubricas diferentes. Os valores (em 1.000 reais) orçados por rubrica para o próximo ano, em ordem crescente, são: 20; 22; 28; 43; 43; 43; 61; 61; 61; 64; 72 e 82. Pode-se afirmar, então, que a mediana destes valores é:
a) 43
b) 50
c) 52
d) 61

4. A empresa "Cerrado" distribuiu seus empregados nas faixas salariais abaixo, em salários mínimos:

Faixa Salarial (Sal. mínimos)	Número de Empregados
1I— 5	15
5I— 9	40
9I—13	10
13I—17	5

O salário mediano da empresa é
a) 7 salários mínimos.
b) 40 salários mínimos.
c) 6,82 salários mínimos.
d) 9 salários mínimos.

5. (ESAF/TTN) Considere as medianas dos grupos abaixo.
Grupo I: 10, 6, 30, 2, 5, 8.
Grupo II: 7, 4, 2, 10, 7, 15.
Grupo III: 5, 9, 7, 33, 18, 4.
Grupo IV: 6, 9, 4, 10, 10, 11.

Os grupos que têm a mesma mediana são
a) I e II.
b) II e III.
c) III e IV.
d) I e III.
e) II e IV

6. Na série (20, 30, 40, 60, 50, 80, 80) a mediana será:
a) 40
b) 50
c) 60
d) 80

7. (ESAF/TTN) De acordo com a distribuição de freqüência transcrita a seguir, pode-se afirmar que:

Pesos (kg)	Freqüências simples absolutas
2I— 4	9
4I— 6	12
6I— 8	6
8I—10	2
10I —12	1

A mediana da distribuição é igual a
a) 5,20kg.
b) 5,30kg.
c) 5,00kg.
d) um valor inferior a 5kg.
e) 5,10kg.

8. (ESAF/TTN) De acordo coma distribuição de freqüência transcrita a seguir, pode-se afirmar que:

Diâmetro (cm)	Freqüências simples absolutas
4 ⊢ 6	6
6 ⊢ 8	8
8 ⊢ 10	12
10 ⊢ 12	10
12 ⊢ 14	4

A mediana da distribuição
a) é eqüidistante da média aritmética e da moda.
b) é igual à média aritmética.
c) é inferior à média aritmética.
d) coincide com o ponto médio de um intervalo de classe.
e) pertence a um intervalo de classe distinto do que contém a média aritmética.

Variância (S^2)
A variância é definida como sendo a média aritmética dos quadrados dos desvios calculados em relação à média aritmética dos valores da série.

$$S^2 = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

Fórmula Breve para o Cálculo da Variância
Pode-se demonstrar que a fórmula dada acima e equivalente à seguinte:

$$S^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$$

Em palavras: A variância é igual à diferença entre a média aritmética dos quadrados dos valores da série e o quadrado da média aritmética da mesma.
O uso da fórmula acima permite chegarmos ao mesmo resultado da primeira fórmula apresentada, sem necessidade de calcularmos os desvios.

Calculo da Variância numa Amostra
A qualidade da estimativa do valor da variância a partir dos dados de uma amostra sofre influência do número de elementos disponíveis na amostra, tendendo a apresentar resultados menos precisos para amostras com pequeno número de elementos.
Para obtermos uma melhor estimativa do valor da variância, devemos empregar um fator de correção:

fator de correção de Bessel = $\frac{n}{n-1}$

Deste modo, ao multiplicarmos o valor resultante de S^2 pelo fator de correção de Bessel, obteremos uma estimativa melhor para a variância, usualmente indicada pela expressão S^2_{n-1}:

$$S^2_{n-1} = S^2 \cdot \frac{n}{n-1}$$

Na prática, quando n é grande (n **>** 30) não há diferença significativa entre os valores obtidos por S^2 e por S^2_{n-1}, possibilitando, assim, que desprezemos o uso do fator de correção. Entretanto, deve-se dar preferência ao cálculo de S^2_{n-1} sempre que estivermos trabalhando com uma amostra com menos de 30 elementos, pois desta forma teremos uma estimativa melhor para a variância.

Propriedades da Variância
1ª Se adicionarmos (ou subtrairmos) uma mesma constante a todos os valores de uma série, a variância permanecerá inalterada.

Exemplo:
Calcular a variância da seguinte amostra de idades num grupo de funcionários de certa empresa: 46 anos, 48 anos, 52 anos, 55 anos.

Solução:
Subtraindo 50 de cada um dos valores da amostra obteremos a nova série:

(-4, -2, 2, 5)

Nela, a variância será a mesma da série original mas os cálculos serão bem mais "confortáveis".
Usando a fórmula breve (2ª fórmula) para o cálculo da variância teremos:

Média dos quadrados das idades:

$$\overline{x^2} = \frac{16+4+4+25}{4} = \frac{49}{4} = 12{,}25 \text{ anos}^2$$

Quadrado da média de idades:

$$(\bar{x})^2 = \left(\frac{-4-2+2+5}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \text{ anos}^2$$

Variância:

$$S^2_{n-1} = \left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{49}{4} - \frac{1}{16}\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{195}{12} = 16{,}25 \text{ anos}^2$$

Observe que a unidade de medida que indicou a variância é anos^2 (anos ao quadrado).

A unidade de medida que expressa uma variância é sempre o quadrado da unidade de medida da variável estudada.

2ª Se multiplicarmos (ou dividirmos) todos os valores de uma série por uma mesma constante, a variância ficará multiplicada (ou dividida) pelo quadrado do valor daquela constante.

Exemplo:
Considere as séries A = (1, 3, 6, 8) e B = (10, 30, 60, 80). Se o valor da variância da série A for igual a 9, 667, qual será o valor da variância da série B?

Solução:
A série B pode ser obtida multiplicando-se todos os valores da série A por 10. Deste modo, a variância da série B será igual à variância da série A multiplicada por 10^2, ou seja:

(Variância da série B) = 10^2 x (Variância da série A)

(Variância da série B) = 100 x 9,667 = 966,7

Desvio Padrão (S)
Vimos que a unidade de medida de uma variância é igual ao quadrado da unidade de medida da variável estudada. A fim de eliminarmos este inconveniente, criamos uma nova medida de dispersão, o desvio padrão, que é definido como sendo a raiz quadrada da variância, e representado por S_{n-1}, ou por S, conforme seu cálculo use o fator de correção ou não, respectivamente.

$$S = \sqrt{S^2}$$

e

$$S_{n-1} = \sqrt{S^2_{n-1}}$$

O desvio padrão indica, em termos absolutos, o afastamento dos valores observados e relação à média aritmética da série estudada.

Propriedades do Desvio Padrão

1ª Se adicionarmos (ou subtrairmos) uma mesma constante a todos os valores de uma série, o desvio padrão permanecerá inalterado.

Exemplo:

As séries (2, 3, 5, 8, 10) e (40, 41, 43, 46, 48) têm desvios padrões iguais, pois os elementos da segunda podem ser obtidos dos elementos da primeira, adicionando-se 38 a cada um deles.

2ª Se multiplicarmos (ou dividirmos) por uma mesma constante todos os elementos de uma série, o desvio padrão ficará multiplicado (ou dividido) pelo valor absoluto daquela constante.

Exemplo:
Calcular o desvio padrão da distribuição de diâmetros fornecida na tabela abaixo:

Diâmetros (cm)	Freq. Absolutas simples
10 ⊢ 15	2
15 ⊢ 20	4
20 ⊢ 25	6
25 ⊢ 30	5
30 ⊢ 35	3

Solução:
Como se trata de uma tabela de distribuição de freqüências com dados agrupados em classes, os cálculos devem ser executados utilizando-se os pontos médios dos intervalos de classes (12,5 , 17,5 , 22,5 , 27,5 e 32,5), com suas respectivas freqüências simples como pesos para os cálculos de média.

Se subtrairmos 22,5 de todos os valores dos pontos médios, o desvio padrão não será alterado.
Dividindo, em seguida, todos os resultados por 5 (que é a amplitude dos intervalos de classe), o desvio padrão ficará igualmente dividido por 5, mas nossos cálculos serão menos trabalhosos. Assim, teremos a seguinte tabela:

(X-22,5) ÷ 5	Freq. absolutas Simples
-2	2
-1	4
0	6
1	5
2	3

Média dos quadrados:

$$\overline{x^2} = \frac{2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (0)^2 + 5 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (2)^2}{20}$$

$$\overline{x^2} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{20} = \frac{29}{20} = 1{,}45\,\text{cm}^2$$

Quadrado da média:

$$\left(\overline{x}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) + 6 \cdot (0) + 5 \cdot (1) + 3 \cdot (2)}{20}\right)^2 = \left(\frac{3}{20}\right)^2 = 0{,}0225\,\text{cm}^2$$

Variância:

$$S^2_{n-1} = \left[\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2\right] \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$S^2_{n-1} = \left(1{,}45 - 0{,}0225\right) \cdot \frac{20}{19}$$

$$S^2_{n-1} = 1{,}4275 \text{ x } 1{,}05263\,\text{cm}^2$$

Desvio Padrão:

$$S_{n-1} = \sqrt{S_{n-1}^2}$$
$$S_{n-1} = \sqrt{1{,}50263} = 1{,}2258\,\text{cm}$$

Então o desvio padrão da série dada será o produto do valor encontrado por 5, ou seja:

5 x 1,2258 = 6,129 cm

EXERCÍCIOS - DESVIO PADRÃO

1. Determinar o desvio padrão da amostra (10, 10, 11, 11).

a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{4}}$

c) $\sqrt{10{,}5}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{4}$

2. Dados os conjuntos A = (-2, -1, 0, 1, 2) e B = (30, 35, 40, 45, 50), pode-se afirmar em relação ao desvio padrão em B:
a) é igual ao desvio padrão em A;
b) é o quíntuplo do valor do desvio padrão de A;
c) é o quíntuplo do valor do desvio padrão de A, somado com 40;
d) é 40 unidades maior que o desvio padrão de A;
e) não pode ser avaliado a partir do desvio padrão de A.

3. (BACEN-94) Em certa empresa o salário médio era de $ 90.000,00, com desvio padrão de $ 10.000,00. Todos os salários receberam um aumento de 10%. Então o desvio padrão dos novos salários passou a ser:
a) $10.000,00
b) $10.100,00
c) $10.500,00
d) $10.900,00
e) $11.000,00

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Progressões Aritméticas

Definição

Dados os números reais **a** e **r**, denominamos progressão aritmética (P.A.) a toda seqüência (a_1 , a_2, a_3 , ...) tal que:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \ \ (\text{para } n \geq 1) \end{cases}$$

Onde **r** é chamado **razão** da P.A.

Exemplos:

1º) A seqüência (3, 7, 11, 15, 19) é uma P.A. com 5 termos onde $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, $a_5 = 19$ e a razão é 4.

2º) Numa Pa de 20 termos onde $a_1 = 50$ e r = -2, os quatro primeiros termos são $a_1 = 50$, $a_2 = 48$, $a_3 = 46$ e $a_4 = 44$.

Propriedades

• A diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo anterior é igual à **razão** da P.A.

$a_{n+1} - a_n = r$

• Qualquer termo, a partir do segundo, é a **média aritmética** dos termos vizinhos a ele (antecedente e sucessor).

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

• Considerando **n** termos consecutivos de uma P.A. , a **soma** de dois termos **eqüidistantes dos extremos** é igual à soma dos termos extremos.

Termo geral de uma P.A.

Numa P.A. de razão **r**, vale a seguinte igualdade:

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot r$$

Exemplos:

1º Numa P.A. de razão 3, cujo 8º termo vale 10, o valor do 15º termo é:

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_8 + (15 - 8) \cdot 3 \\ a_{15} &= 10 + 7 \cdot 3 \\ a_{15} &= 10 + 21 \\ a_{15} &= 31 \end{aligned}$$

2º Se o 5º termo de uma P.A. é 13 e o 9º termo é 45, pode-se determinar a razão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &a_9 = a_5 + (9 - 5) \cdot r \\ &45 = 13 + 4 \cdot r \\ &45 - 13 = 4r \\ &32 = 4r \Rightarrow r = 8 \end{aligned}$$

3° Numa P.A. de razão 6, o valor do 8° termo é 40 e o último termo vale 106. Pode-se determinar o número de termos da P.A. como segue:

$$\text{dados} \begin{cases} \text{último termo: } a_n = 106 \\ \text{oitavo termo: } a_8 = 40 \\ \text{razão: } 6 \end{cases}$$

$$a_n = a_8 + (n - 8) \cdot r$$
$$106 = 40 + (n - 8) \cdot 6$$
$$66 = (n - 8) \cdot 6$$
$$11 = n - 8 \Rightarrow n = 19$$

Soma de n termos consecutivos de uma P.A. (S_n)

Para calcularmos a soma de **n** termos consecutivos de uma PA., devemos:

1° Calcular a **média aritmética** dos dois extremos;
2° Multiplicar a média pelo número de termos somados.

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

Exemplo: Numa P.A. com 30 termos o primeiro e 12 e o último, 58. Qual o valor da soma de todos eles?

Solução:

$$S_{30} = \left(\frac{12 + 58}{2}\right) \cdot 30$$

$$S_{30} = \left(\frac{70}{2}\right) \cdot 30$$

$$S_{30} = 35 \cdot 30 = 1.050$$

$$S_{30} = 1.050$$

Progressões Geométricas

Definição

Dados os números reais não nulos **a** e **q**, denominamos progressão geométrica (P.G.) a toda seqüência (a_1, a_2, a_3, ...) tal que:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (\text{para } n \geq 1) \end{cases}$$

Onde **q** é chamado razão da P.G.

Exemplos:

1º A seqüência (3, 6, 12, 24) é uma P.G. onde $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$, $a_4 = 24$ e a razão é q=2.

2º Numa P.G. onde $a_1 = 320$ e q = $\frac{1}{2}$, os quatro primeiros termos são $a_1 = 320$, $a_2 = 160$, $a_3 = 80$ e $a_4 = 40$

Propriedades

• o quociente entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo anterior é igual à razão da P.G.;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

• qualquer termo, a partir do segundo, é, em módulo, a **média geométrica** dos termos vizinhos a ele (antecedente e sucessor);

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \text{x} a_{n+1}}$$

• considerando **n** termos consecutivos de uma P.G., o **produto** de dois termos **eqüidistantes dos extremos** é igual ao produto dos termos extremos.

$$A_1 \text{ x } a_n = a_{1+k} \text{ x } a_{n-k}$$

Termo geral de uma P.G.

Numa P.G. de razão **q**, vale a seguinte igualdade:

$$a_n \ ? \ a_k \ ?q^{n-k}$$

Exemplo: Numa P.G. de razão 3, cujo 5º termo vale 8, o valor do 9º termo é:

$a_9 = a_5 \text{ x } q^{9-5}$
$a_9 = 8x3^4 = 648$

Soma de n termos consecutivos de uma PG.

A soma de **n** termos consecutivos de uma PG. é dada pela seguinte expressão:

$$S_n \ ? \ a_1 \ ?\frac{q^n \ ? 1}{q \ \text{-}1} \quad ?\text{para } q \ ? \ 1?$$

Exemplo: Numa P.G. com 10 termos, o primeiro vale 25 e a razão é 2. Determinar a soma destes termos.

Solução:

$$S_{10} \ ? \ 25 \ ?\frac{2^{10} \ ? 1}{2 \ ? \ 1} \ ? \ 25 \ ?1023$$
$$S_{10} \ ? \ 25 \ ?1.023$$
$$S_{10} \ ? \ 25.575$$

Soma-limite de uma P.G. infinita

Numa PG. onde o **módulo** da razão seja **menor** que 1, a soma dos seus infinitos termos será um número finito dado por:

$$S_? \ ? \ \frac{a_1}{1 \ ? \ q} \quad ?\text{para } |q| \ ? \ 1?$$

Exemplo: Determinar a soma-limite da expressão

$$2 \ ? \ 1 \ ? \ \frac{1}{2} \ ? \ \frac{1}{4} \ ? \ \frac{1}{8} \ ? \ ...$$

Solução:

1° termo: 2

razão: $\frac{1}{2}$

$$S_? \ ? \ \frac{a_1}{1 \text{-} q}$$
$$S_? \ ? \ \frac{2}{1 \ ? \ \frac{1}{2}} \ ? \ \frac{2}{\frac{1}{2}}$$
$$S_? \ ? \ 2 \ ?2 \ ? \ 4$$
$$S_? \ ? \ 4$$

EXERCÍCIOS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Determine a razão de cada uma das seguintes progressões aritméticas:
a) (34, 41, 48, 55, 62)
b) (78, 83, 88, 93, 98)
c) (19, 17, 15, 13, 11)
d) (-30, -27, -24, -21)
e) (4/3, 5/3, 2, 7/3)

2. Determine o 10° termo de cada uma das progressões aritméticas do exercício anterior.

3. Determine o termo indicado em cada uma das seguintes progressões aritméticas:
a) $a_6 = 2$, $r = 2$, $a_{20} = ?$
b) $a_{10} = 15$, $r = 3$, $a_{30} = ?$
c) $a_8 = 100$, $r = 5$, $a_{18} = ?$
d) $a_{20} = 40$, $r = -10$, $a_{100} = ?$
e) $a_{40} = 18$, $r = 20$, $a_{80} = ?$
f) $a_{37} = 56$, $r = 12$, $a_{49} = ?$

4. Determine o primeiro termo das progressões aritméticas em cada caso:
a) $a_{10} = 190$ e $r = 8$
b) $a_{15} = 580$ e $r = 10$
c) $a_{20} = 120$ e $r = 5$
d) $a_8 = 70$ e $r = 7$
e) $a_{100} = 750$ e $r = -2$
f) $a_{46} = 280$ e $r = -2$
g) $a_{10} = -30$ e $r = -3$
h) $a_8 = 0$ e $r = -5$

5. Determine a razão de cada P.A. seguinte:
a) $a_1 = 5$ e $a_{11} = 85$
b) $a_1 = 10$ e $a_{26} = 135$
c) $a_1 = 100$ e $a_{16} = 40$
d) $a_1 = 50$ e $a_{13} = -10$
e) $a_5 = 50$ e $a_{15} = 150$
f) $a_{10} = 105$ e $a_{25} = 135$
g) $a_{10} = 200$ e $a_{100} = 240$
h) $a_{45} = 300$ e $a_{100} = 190$

6. Determine o número de termos de cada uma das progressões aritméticas seguintes:
a) (1, 7, 13, ..., 121)
b) (74, 95, ..., 200)
c) (-3, 0, ..., 39)
d) (108, 117, ... 999)
e) (1, 3, 5, ..., 99)
f) (2, 4, 6, ..., 100)

7. Determine o quarto termo de cada seqüência resultante nas seguintes interpolações aritméticas:
a) Interpolar 3 meios aritméticos entre 12 e 28.
b) Inserir 5 meios aritméticos entre 10 e 40.
c) Interpolar 6 meios aritméticos entre 20 e 90.
d) Inserir 10 meios aritméticos entre 10 e 109.
e) Interpolar 5 meios aritméticos entre 40 e 10.

8. Sabendo que os três primeiros termos de uma P.A. são, respectivamente, $x - 1$, $x + 5$ e $4x - 4$, encontre o valor numérico do quarto termo.

9. Determine a razão da P.A. $(5 - x, x + 1, 3x - 3)$ em função de x.

10. Determine o valor da soma dos 100 primeiros números inteiros positivos.

11. Determine o valor da soma dos 30 primeiros números ímpares positivos.

12. Determine o valor da soma dos 20 primeiros termos da sucessão (10, 13, 16, 19, ...).

13. Determine o valor da soma de todos os múltiplos de 7 compreendidos entre 10 e 100.

14. Determine o valor da soma de todos os múltiplos de 11 compreendidos entre 30 e 200.

15. Numa urna há 1000 bolinhas. Retirando 3 bolinhas na primeira vez, 6 bolinhas na segunda, 9 na terceira, e assim por diante, quantas bolinhas restarão na urna após a vigésima retirada?

EXERCÍCIOS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1. Identifique a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:
a) (3, 6, 12, 24)
b) (24, 12, 6, 3)

c) (1/2, -1, 2, -4, 8)
d) (65, 0, 0, 0, 0)
e) (4, -8, 16, -32, 64)
f) (128, -64, 32, -16)
g) (6, 6 $\sqrt{2}$, 12, 12 $\sqrt{2}$)
h) (3, 3 $\sqrt[3]{2}$, 3 $\sqrt[3]{4}$, 6, 6 $\sqrt[3]{2}$)
i) (-l, $\sqrt{2}$, -2, 2 $\sqrt{2}$, -4)

2. Determine o sétimo termo de cada uma das seguintes progressões geométricas:
a) (4, 8, 16, 32, ...)
b) (10, 30, 90, ...)
c) (5, 20, 80,320, ...)
d) (10.000, 1.000, 100, ...)
e) (128, 64, 32, ...)
f) (1, -2, 4, -8, ...)

3. Determine o termo pedido de cada P.G., conhece-do a razão e um de seus termos:
a) a_3=10,q =2, a_8=?
b) a_3 =q = $\sqrt{3}$, a_{10} =?
c) a_6 = 12.500, q = -5, a_1 =?
d) a_{12} = $\frac{5}{8}$,q = $\frac{1}{2}$,a_1 =?

4. Determine a razão de cada P.G. conhecendo dois de seus termos:
a) a_1 =6 e a_6 =192
b) a_1 =10 e a_8 = -1.280
c) a_3 =8 e a_7 = 5.000
d) a_1 =25 e a_7 =1.600
e) a_3 = -125 e a_7 = -2.000
f) a_5 = $\frac{2}{3}$ e a_9 = 54

5. Determine o segundo termo de cada seqüência resultante das interpolações geométricas indicadas: a) Inserir 4 meios geométricos entre 4 e 1/8.
b) Interpolar 4 meios geométricos entre 3 e -96.
c) Inserir 2 meios geométricos entre 2 e 10.
d) Inserir 3 meios geométricos entre 2 e 32, de modo a obter uma P.G. **alternante**.
e) Interpolar 3 meios geométricos entre 4 e 36, de modo a obter uma P.G. **crescente**.

6. Determine o número de termos de cada P.G. indicada:
a) (2/3, 2, 6, ..., 486)
b) (1/9, 1/3, ..., 729)
c) (100, 20, ..., 0,0064)
d) (2, 8, 32, ..., 2.048)
e) (1, 5, ..., 3.125)
f) (0,125, 0,5, ..., 128)

7. Determine o valor da expressão:
$2^3+2^4+2^5+2^6+ \ldots +2^{10}$

8. Calcular a soma dos n termos de uma P.G. ilimitada cujo termo geral é $a_n = 3.^{2n}$

9. Calcular a razão de uma PG. cujos 3 únicos termos são os lados de um triângulo retângulo.

10. Achar o limite da soma dos termos da progressão geométrica:

$$?2 ? \frac{2}{3}, 1 ? \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots ?$$

11. Unem-se os meios dos lados de um triângulo eqüilátero cuja área é $9\sqrt{3}\,cm^2$ e obtém-se outro triângulo eqüilátero; unem-se os meios dos lados desse outro e obtém-se um novo triângulo eqüilátero, e assim sucessivamente. Achar o limite da soma das áreas desses n triângulos.

PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

Princípio Multiplicativo (P.M.)

Se um acontecimento **A** pode ocorrer de **m** maneiras diferentes e se, para cada uma das **m** maneiras possíveis de ocorrência de **A**, um segundo acontecimento **B** pode ocorrer de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento **A** seguido do acontecimento **B** é **m** x **n**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. De quantas maneiras diferentes se pode formar um casal, composto por um rapaz e uma moça, escolhidos aleatoriamente entre os 5 rapazes e as 4 moças que compõem um grupo?

Solução:

ACONTECIMENTOS	Nº DE OCORRÊNCIAS
A : Escolha de um rapaz	5
B : Escolha de uma moça	4

Logo, pelo P.M., teremos:

$5 \cdot 4 = 20$ maneiras.

2. Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados no sistema de numeração decimal?

Solução:

ACONTECIMENTOS	N° DE OCORRÊNCIAS
A: Escolha do algarismo das dezenas	**9**, pois o zero não pode ocorrer nas dezenas
B: Escolha do algarismo das unidades	**9**, pois o algarismo das unidades deve ser diferente do das dezenas

Logo, pelo P.M., teremos:

$9 \cdot 9 = 81$ números.

3. Quantos números ímpares e de dois algarismos distintos podem ser formados no sistema de numeração decimal?

Solução:

ACONTECIMENTOS	N° DE OCORRÊNCIAS
A: Escolha do algarismo das unidades	**5**, pois servem somente 1, 3, 5, 7 ou 9
B: Escolha do algarismo das dezenas	**8**, pois o algarismo das dezenas não pode ser zero, nem repetido das unidades

Logo, pelo P.M., teremos:

$5 \cdot 8 = 40$ números.

4. Quantos números pares e com dois algarismos distintos podem ser formados no sistema de numeração decimal?

Solução:
Se o número **terminar em zero**, então existirão 9 maneiras de escolher o algarismo das dezenas:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9

Mas se o número **não terminar em zero**, então sobrarão apenas 8 maneiras de escolher o algarismo das dezenas, pois um dos algarismos **pares** da lista apresentada acima já terá sido usado na casa das unidades.
Temos, portanto, dois casos a considerar:

Caso A: Números pares terminados em zero:

ACONTECIMENTOS N° DE OCORRÊNCIAS

A: O algarismo das unidades é **zero**. **1**

B: Escolha do algarismo das dezenas **9**

Logo, pelo P.M., teremos:

$1 \cdot 9 = 9$ números pares terminados em zero.

Caso B: Números pares não terminados em zero:

ACONTECIMENTOS	N° DE OCORRÊNCIAS
A: Escolha do algarismo das unidades	**4**, pois será 2, 4, 6 ou 8
B: Escolha do algarismo das dezenas	**8**, pois o algarismo das dezenas não pode ser zero, nem repetido das unidades

Logo, pelo P.M., teremos:

$4 \times 8 = 32$ números pares não terminados em zero.

Juntando os dois resultados encontrados, podemos concluir que o total de números pares formados por dois algarismos distintos é:

$9 + 32 = 41$ números.

5. Três pessoas devem acomodar-se numa fila de 5 cadeiras. Considerando-se que todas as posições possíveis são distintas entre si, de quantas maneiras podem as três pessoas acomodar-se?

Solução:

ACONTECIMENTOS	N° DE OCORRÊNCIAS
A: A primeira pessoa escolhe uma cadeira vaga.	5, pois todas as cadeiras ainda estão vagas.
B: A segunda pessoa escolhe uma cadeira vaga.	4, pois uma das 5 cadeiras já está ocupada, restando 4 vagas.
C: A terceira pessoa escolhe uma cadeira vaga.	3, pois duas das 5 cadeiras já estão ocupadas, restando 3 vagas.

Logo, pelo P.M., teremos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras.

Combinações

Considere um conjunto qualquer com **n** elementos distintos (**n** ≥ 1).
Chamamos de **combinação** a cada um dos **subconjuntos** possíveis com **p** elementos, $0 \leq$ **p** $\leq$ **n** escolhidos entre os **n** elementos que pertencem ao conjunto considerado.
É importante notar que uma combinação é sempre um subconjunto. Portanto, ao trocarmos a **ordem** dos seus elementos, ela permanecerá inalterada.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Quantos subconjuntos distintos e com 3 elementos podem ser formados com os elementos do conjunto
$C = \{a, b, c, d, e\}$?

Solução:

Usando o princípio multiplicativo, sabemos que o número de maneiras de escolhermos uma **seqüência** de três elementos quaisquer dentre os 5 considerados, é:
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras

Entretanto, como a **ordem** dos elementos nos subconjuntos **não os altera**, acabamos contando, no cálculo acima, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes cada um dos subconjuntos procurados, pois as seqüências abc, acb, cab, cba, bac e bca dão o mesmo subconjunto $\{a, b, c\}$.
Sendo assim, o número de subconjuntos com 3 elementos será:

$60 \div 6 = 10$ subconjuntos.

2. De quantos modos é possível formar uma comissão de 4 alunos escolhidos dentre os 10 que se encontram numa sala?

Solução:

Como a **ordem** em que os alunos são escolhidos **não altera** a comissão formada por eles, o problema é de **combinações**.

1) Seqüências de 4 alunos escolhidos entre os 10 possíveis:
$(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)$ seqüências

2) Nas seqüências acima, cada comissão de 4 alunos foi contada:
$(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ vezes

3) Então, é possível formar a comissão de 4 alunos de:
$(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) \div (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 210$ maneiras

EXERCÍCIOS

1. Maurício quer trocar o vale-presente que ganhou num amigo secreto e a loja informou que ele pode optar por um CD ou por um livro. Entre as opções estão 5 CDs e 6 livros pelos quais Maurício interessou-se. De quantas maneiras distintas poderá resultar a escolha de Maurício?
a) 11
b) 15
c) 18
d) 20
c) 30

2. Cínthia pretende comprar um CD e um livro para presentear a seus dois filhos. Se entre as opções que a loja lhe oferece estão 5 CDs e 6 livros que lhe interessaram, de quantas maneiras poderá resultar a compra pretendida?
a) 11
b) 15
c) 18
d) 20
c) 30

3. Para viajar da cidade A para a cidade B, uma pessoa deve decidir se vai com um dos três automóveis da empresa em que trabalha, ou se vai de ônibus, utilizando uma das três companhias que fazem o trajeto pretendido, ou se vai de avião utilizando uma das quatro empresas aéreas que oferecem vôos da cidade A para a cidade B. Nestas condições, de quantas maneiras diferentes esta pessoa poderá decidir sobre a condução que irá tomar para viajar?
a) 36
b) 24
c) 21
d) 10
e) 9

4. Miriam e Bruna vão fazer um lanche e cada uma delas deve escolher um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. Se a lanchonete oferece 6 tipos de sanduíches, 5 tipos de bebidas e 3 tipos de sobremesas, então o total de pedidos possíveis para o lanche de Míriam e Bruna, juntas, será:
a) 18.000
b) 8.100
c) 196
d) 90
e) 28

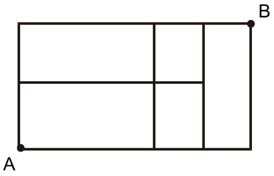
5. Quantos anagramas distintos podem ser formados com as letras da palavra PROVA?
a) 15
b) 20
c) 24
d) 60
e) 120

6. Quantos anagramas da palavra PROVA começam com uma consoante e terminam com uma vogal?
a) 36
b) 24
c) 12

d) 8
e) 6

7. Uma placa de licenciamento é formada por três letras seguidas de quatro dígitos. Tanto as letras quanto os dígitos podem ser repetidos numa placa. Todas as 26 letras podem ser usadas em qualquer uma das três posições de letras, mas nas posições dos dígitos não é permitido que uma placa tenha os quatro dígitos iguais a zero. Assim, por exemplo, são permitidas placas como AAA 9009 e PAR 2468, entre tantas outras, mas não são permitidas placas como CAR 0000 e HEL 0000. Nessas condições o total de placas diferentes que podem ser feitas pode ser calculado corretamente como:
a) $26^3 \times 9^4$
b) $26^3 \times (10^4 - 1)$
c) $(26 \times 25 \times 24 \times 23) \times (10 \times 9 \times 8 \times 7)$
d) $26^3 \times (10 \times 9 \times 8 \times 7)$
e) $(26 \times 25 \times 24 \times 23) \times 9^4$

8. Observe o esquema abaixo para responder o que se pede:



8. Considere que somente seja permitido mover-se para cima sobre as linhas verticais ou para a direita nas linhas horizontais. Então, o total de maneiras possíveis de se ir do ponto A até o ponto B é:
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

9. De um grupo de 8 pessoas, 3 serão sorteadas recebendo prêmios distintos. Quantos resultados distintos existem para este sorteio?
a) 12
b) 24
c) 56
d) 336
e) 563

10. De um grupo de 8 pessoas, 3 serão sorteadas recebendo prêmios idênticos. Quantos resultados distintos existem para este sorteio?
a) 24
b) 56
c) 64
d) 336
e) 643

11. Se 20 pessoas presentes numa festa de ano-novo brindarem entre si batendo suas taças de champanhe, quantas vezes as taças serão batidas ao todo?
a) 190
b) 210
c) 380
d) 570
e) 3.610

12. De quantas maneiras é possível formar uma equipe composta por dois homens e duas mulheres escolhidos dentre os integrantes de um grupo onde se encontram 5 homens e 6 mulheres?
a) 600
b) 360
c) 300
d) 270
e) 150

13. Quantos triângulos é possível formar unindo-se três tomados entre nove pontos marcados em uma circunferência?
a) 240
b) 120
c) 60
d) 30

e) 15

14. Quantas diagonais possui um octógono regular?
a) 56
b) 40
c) 28
d) 20
e) 15

15. Decompondo o número 600 em seus fatores primos, obtemos $2^3 \times 3^1 \times 5^2$. Quantos divisores positivos distintos tem, então, o número 600?
a) 6
b) 12
c) 24
d) 30
e) 60

Observe a figura abaixo para responder a próxima questão:

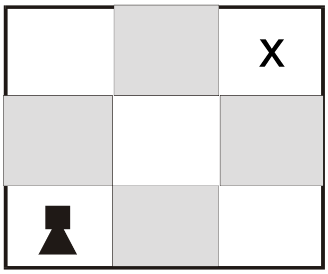


Fig. A

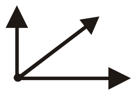


Fig. B

16. A figura A representa um pequeno tabuleiro de Xadrez com somente 9 casas e indica a posição em que se encontra o rei. A figura B representa os únicos movimentos que o rei pode fazer para deslocar-se pelo tabuleiro de uma casa para outra. Quantos caminhos distintos existem levando o rei da posição em que ele se encontra até a casa marcada corri uni X ?
a) 13
b) 12
c) 11
d) 10
c) 9

PROBABILIDADES

Definições

1) **Fenômenos aleatórios ou experimentos aleatórios** são acontecimentos que, mesmo repetidos diversas vezes sob as mesmas condições, podem apresentar resultados diferentes de forma imprevisível.

2) **Espaço amostral ou conjunto universo** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório.

3) **Evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral.

4) **Evento certo** é o evento que compreende todos os elementos do espaço amostral, ou seja, é um subconjunto do espaço amostral.

5) **Evento impossível** é o subconjunto vazio.

6**) Evento elementar** é qualquer subconjunto unitário do espaço amostral.

7) **Eventos mutuamente exclusivos** são eventos que têm intersecção vazia dois a dois.

8) **Eventos complementares ou contrários** são dois eventos mutuamente exclusivos tais que a sua união seja igual ao espaço amostral.

Probabilidade de um evento

A probabilidade de um evento é um número com as seguintes propriedades:

- Está sempre compreendida no intervalo de 0 a 1.

$$0 ? P(A) ? 1$$

- A probabilidade do *evento certo* é sempre 1.

$$P(U) = 1$$

- A probabilidade do *evento impossível* é sempre *zero.*

$$P(?) = 0$$

Probabilidade de um evento num espaço amostral equiprovável

Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando a probabilidade de ocorrência de cada um dos seus eventos elementares for igual a:

$$\frac{1}{n(U)}$$

Considere que o número de elementos de um espaço amostral equiprovável seja n(U) e que o número de elementos de um evento A seja n(A).

A probabilidade de ocorrer o evento A será:

$$P(A) ? \frac{n(A)}{n(U)}$$

• **Regra do "ou"** - Dados dois eventos, A e B, a probabilidade de que ocorram **A ou B** é igual a:

$$P(A ? B) ? P(A) ? P(B) - P(A ? B)$$

Se A e B forem *eventos mutuamente exclusivos,* então teremos:

$$P(A ? B) ? P(A) ? P(B)$$

• **Regra do "e"** - Dados dois eventos, A e B, a probabilidade de que ocorram **A e B** é igual a:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

onde P(B/A) significa a probabilidade de ocorrer B sabendo que A já tenha ocorrido.

• **Eventos independentes** - Dois eventos, A e B, são independentes quando a ocorrência de um deles *não afeta* a probabilidade de ocorrência do outro:

P(B/A) = P(B) e P(À/B) = P(A)

Quando A e B são eventos *independentes,* a probabilidade de que ocorram **A e B** fica igual a:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Distribuição Binomial

Considere que A e B sejam dois eventos complementares:

$$A \cap B = \emptyset$$

e

$$A \cup B = U \text{ (sendo } U \text{ o espaço amostral)}$$

Valerão as seguintes propriedades:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$
- $P(A \cap B) = 0$

• Se as probabilidades dos eventos A e B forem, respectivamente, P(A) = a e P(B) = b, então a probabilidade de ocorrer o evento A exatamente **k** vezes em **n** tentativas será dada por:

$$P_k(A) = C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

onde C_n^k significa a combinação de n elementos, tomados k a k.

Exemplo: Um casal saudável planeja ter quatro filhos. Qual é a probabilidade de que este casal tenha exatamente dois meninos?

Solução:

A = nascer um menino $\Rightarrow$ P(A) = 1/2
B = nascer uma menina $\Rightarrow$ P(B) = 1/2
n = 4 (4 nascimentos)
k = 2 (2 meninos)

$$P_2(A) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}$$

$$P_2(A) = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Então, a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois meninos é de 3/8.

Obs.: podemos também dizer que a probabilidade encontrada acima é de 37,5% pois:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

EXERCÍCIOS PROBABILIDADES

1. Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Sorteando-se uma delas, qual é a probabilidade de que ela tenha um número múltiplo de 5?

2. Um dado é lançado e sua face superior é observada. Qual é a probabilidade de que ocorra um número maior que 4?

3. Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Sorteando-se uma delas, qual é a probabilidade de que ela tenha um número que seja múltiplo de 2 ou de 3?

4. Uma urna contém 30 bolas numeradas de 1 a 30. Sorteando-se uma delas, qual é a probabilidade de que ela tenha um número que seja múltiplo de 2 e de 3?

5. Qual é a probabilidade de que a equação $ax = b$ tenha raiz inteira se os coeficientes a e b pertencem ao conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, podendo, eventualmente, ser iguais?

6. Uma urna contém 5 bolas verdes, 4 bolas brancas e 3 bolas azuis. Sorteia-se uma bola. Qual é a probabilidade de que ela seja branca ou azul?

7. Uma urna contém 5 bolas verdes, 4 bolas brancas e 3 bolas azuis. Sorteia-se uma bola. Qual é a probabilidade de que ela não seja branca nem azul?

8. Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Matemática, 150 estudam Direito e 10 estudam as duas disciplinas. Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele estude Direito mas não estude Matemática?

9. Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Matemática, 150 estudam Direito e 10 estudam as duas disciplinas. Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele estude Direito, sabendo-se que ele estuda Matemática?

10. Com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 são formados todos os números possíveis de 4 algarismos. Sorteia-se um deles. Qual é a probabilidade de que ele seja ímpar?

11. Uma urna contém 5 bolas verdes e 3 bolas azuis. Duas bolas são retiradas ao acaso e sem reposição. Qual é a probabilidade de que as duas bolas sejam azuis?

12. Seis pessoas, entre elas Maria e José, são dispostas em fila ao acaso. Qual a probabilidade de Maria e José ficarem um ao lado do outro?

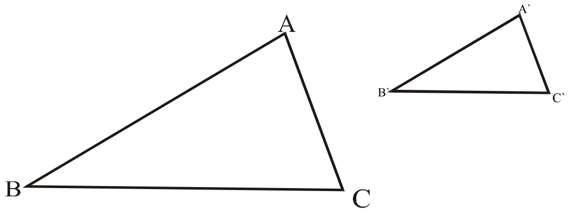
13. Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual é a probabilidade de que ocorram exatamente 3 caras?

14. Um dado é lançado 3 vezes. Qual é a probabilidade de que ocorra o número 5 exatamente duas vezes?

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Definição

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes proporcionais, então a correspondência é chamada uma semelhança e os triângulos se dizem semelhantes.



Representação

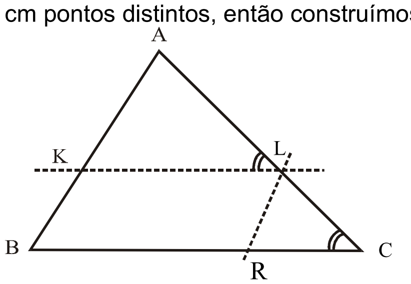
Δ ABC~ Δ A'B'C', então Â$\cong$ Â'; $\hat{B} \cong \hat{B}$; $\hat{C} \cong \hat{C}$ ' e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ (razão de semelhança)

Propriedades

(Reflexiva), (simétrica) e (transitiva).

TEOREMA FUNDAMENTAL

Dado um triângulo ABC, se construirmos uma reta paralela a um dos lados e interceptarmos os outros dois lados cm pontos distintos, então construímos um segundo triângulo semelhante ao anterior.



Seja o Δ ABC e a reta determinada pelos pontos K e L. $\left(\begin{array}{c}\leftrightarrow \\ KL\end{array}\right)$

Hip. $\begin{cases} \overleftrightarrow{KL} // \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{K\} \\ \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{L\} \end{cases}$

Tese: { Δ AKL ~ Δ ABC }

Demonstração

a) $\overleftrightarrow{KL} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} A\hat{K}L \cong A\hat{B}C & \text{(teor. Fund. Paralelismo)} \\ A\hat{L}K \cong A\hat{C}B \\ \hat{A} \end{cases}$

Com isso, satisfazemos a 1ª condição de semelhança: ângulos correspondentes congruentes.

b) Como conseqüência do Teorema de Tales $\frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC}$ (1)

c) Pelo ponto L construímos $L\hat{R} // A\hat{B}$ e, novamente, pelo Teorema de Tales, podemos escrever:

$\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{BR}$ $mas \overline{BR} \cong \overline{LK}$
(KLRB é paralelogramo)

então:

$\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{KL}$ (2)

d) De (1) e (2) $\Rightarrow \frac{AC}{AL} = \frac{BC}{KL} = \frac{AB}{AK}$ ficando satisfeita a segunda condição de semelhança.

e) De a) e d) concluímos que os triângulos são semelhantes.

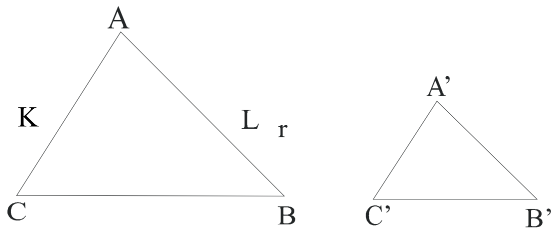
Casos ou Critérios de Semelhança

1° Caso: (AA~)

Dois triângulos são semelhantes quanto têm dois ângulos correspondentes congruentes.

Hip. $\begin{cases} \Delta ABC \text{ e } \Delta A'B'C' \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{cases}$

Tese: { Δ ABC ~ Δ A'B'C'



Demonstração

Vamos supor, para efeito de demonstração, que o Δ ABC tenha seus lados maiores que Δ A'B'C'.
a) Marquemos K $\in \overline{AC}$ tal que $\overline{AK} \cong \overline{A'C'}$.
b) Construímos, pelo ponto K, a reta r / / BC, obtendo-se L, na intersecção com o lado $\overline{AB}$.
c) Pelo teorema fundamental, teremos Δ ABC ~ Δ ALK .
d) Por outro lado, $A\hat{L}K \cong A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C'$ e $A\hat{K}L \cong A\hat{C}B \cong A'\hat{C}'B$ (por paralelismo e pela hipótese).

Assim, pelo critério LAA_0, teremos Δ AKL $\cong \Delta$ A'B'C'.

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \sim \Delta AKL \\ \Delta AKL \sim \Delta A'B'C \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C$$

(c.q.d)

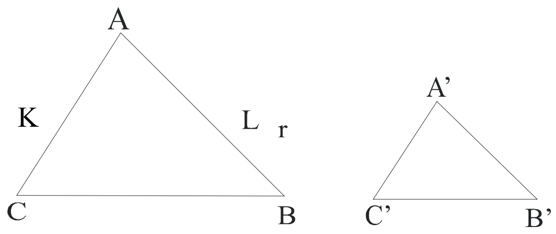
2" Caso: (LAL~)

Dois triângulos são semelhantes quanto têm um ângulo conguente compreendido entre lados correspondentes proporcionais.

Sejam os Δ ABC ~ Δ A' B' C'

Hip. $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \end{cases}$

Tese: Δ ABC ~ Δ A'B'C'



Demonstração

Seja Δ ABC o que possui lados maiores.

a) Marquemos K $\in$ $\overline{AB}$, tal que $\overline{AK} \cong \overline{A'B'}$.
b) Construamos $\overline{KL} // \overline{BC}$, $(L \in \overline{AC})$ ficando assim: o Δ ABC ~ Δ AKL (Teorema fundamental).
c) Dessa semelhança resulta: $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL}$ ou então $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AL}$

Sendo por hipótese $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ então $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AL} \Rightarrow \overline{A'C'} \cong \overline{AL}$

d) Temos então $\begin{cases} \overline{AK} \cong \overline{A'B'} \text{ (construção)} \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \overline{AL} \cong \overline{A'C'} \text{ (hipótese)} \end{cases}$

e pelo critério LAL, o triângulo AKL é côngruo ao triângulo A'B'C'.

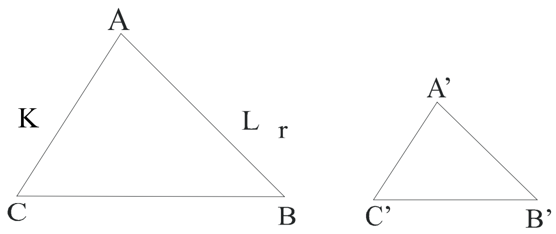
Logo: $\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \sim \Delta AKL \\ \Delta AKL \sim \Delta A'B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
c.q.d.

3° Caso: (LLL~)

Dois triângulos são semelhantes quando têm os três lados correspondentes proporcionais.

Hip. $\left\{ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \right.$

Tese: (Δ ABC ~ Δ A' B' C'



Demonstração:

a) Admitindo-se AB > A' B', tomemos sobre $\overline{AB}$ o ponto k tal que $\overline{AK} \cong \overline{A'B'}$.
b) Pelo teorema fundamental da semelhança, se por K construímos $\overline{KL} // \overline{BC}$ então $\Delta ABC \sim \Delta AKL$ e portanto $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{KL} = \frac{AC}{AL}$.
c) como $\overline{AK} \cong \overline{A'B'}$, podemos escrever $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{KL} = \frac{AC}{AL}$
d) Da hipótese e de (c) temos:

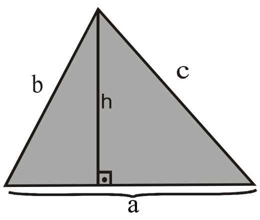
$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{KL} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{B'C'} \cong \overline{KL}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AL} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A'C'} \cong \overline{AL}$$

Concluímos então que Δ AKL ~ Δ A' B' C'.
Assim: Δ ABC ~ Δ AKL $\cong$ Δ A' B' C' $\Rightarrow$ Δ ABC ~ Δ A' B' C' (c.q.d.)

PERÍMETROS E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Triângulos

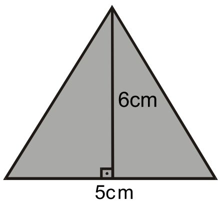


$$\text{Área} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$\text{Per} = a + b + c$$

1°caso: Dadas as medidas de um **lado** e da **altura** correspondente de um triângulo qualquer.

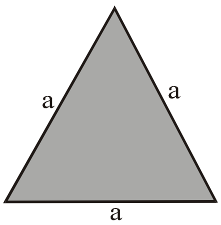
Exemplo: Calcule a área do triângulo representado na figura abaixo:



Solução:

Área= $\frac{5x6}{2} = \frac{30}{2} = 15cm^2$

2º caso: Dada a medida de um **lado** de um triângulo **eqüilátero.**

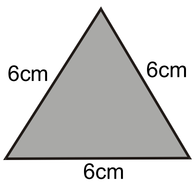


$$\text{Área} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Per} = 3a$$

Exemplo: Determine a área do triângulo eqüilátero cujo lado mede 6 cm.

Solução:



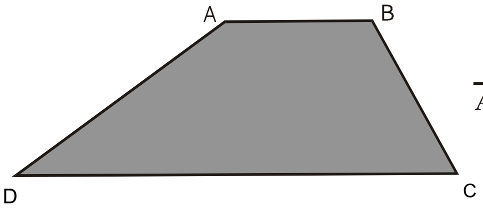
Área= $\frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

Área = $9\sqrt{3cm^2}$

Quadriláteros Notáveis

1. Trapézio

É todo quadrilátero que tenha um par de lados paralelos.



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

• Os lados **paralelos** do trapézio chamam-se **bases**.

• Os lados **não paralelos** de um trapézio são ditos **transversais.**

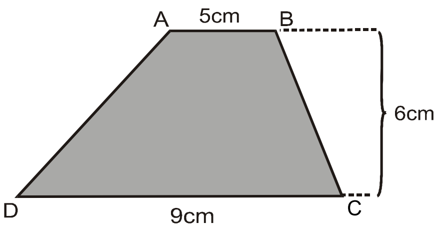
• **Trapézio isósceles** é todo trapézio cujos **lados transversais** são **congruentes.**

• **Trapézio retângulo** é todo trapézio que tenha um **ângulo interno reto.**

Área de um trapézio

A = (média das bases) x (altura)

Exemplo: Determine a área do trapézio representado na figura abaixo:

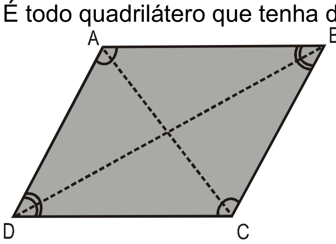


Solução:

$$\left(\frac{5+9}{2}\right)x6 = 7x6 = 42cm^2$$

2. **Paralelogramo**

É todo quadrilátero que tenha dois pares de lados paralelos.



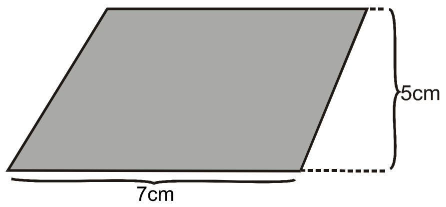
$$\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{DC} \\ \overline{AD} \parallel \overline{BC} \end{cases}$$

Em qualquer paralelogramo valem sempre:
• Os lados opostos são congruentes
• Os ângulos opostos são congruentes
• Dois ângulos consecutivos somam 180°.
• As duas diagonais cortam-se ao meio, ou seja pelo ponto médio.
• Qualquer um dos lados pode ser denominado **base**.

Área de um paralelogramo

Área = (base) x (altura)
Perímetro = 2 x (base) + 2 x (altura)

Exemplo: Determine a área do paralelogramo representado na figura abaixo:



Solução:

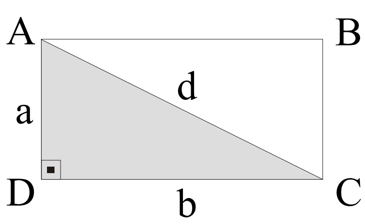
$$\left.\begin{array}{l}\text{base} = 7\text{cm}\\ \text{altura} = 5\text{cm}\end{array}\right\} \text{Área} = 7\text{x}5 = 35\text{cm}^2$$

3. Retângulo

É todo quadrilátero que tenha os **quatro ângulos internos retos.**

Em todo retângulo, é sempre certo que:

- Valem todas as propriedades dos paralelogramos, pois todo retângulo é um paralelogramo.
- As duas diagonais do retângulo têm o mesmo tamanho.
- Cada diagonal do retângulo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são lados do retângulo.



Área de um retângulo

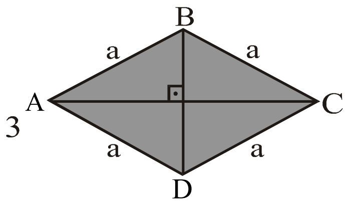
Área = (base) x (altura)

Exemplo: Determine a área do retângulo cujos lados medem 6cm e 8cm.

Solução:
Área = 6 x 8 = 48 cm^2

4. Losango

É todo quadrilátero plano que tenha os quatro lados com mesma medida (lados congruentes).

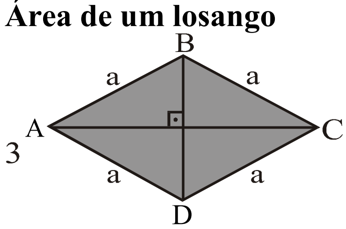


Perím = 4^{a}

Em qualquer losango sempre valem:

- Todas as propriedades dos paralelogramos, pois todo losango é um paralelogramo.
- As diagonais são perpendiculares (formam ângulo reto).
- As diagonais dividem os ângulos internos ao meio (são bissetrizes dos ângulos internos).

Área de um losango



diagonal maior = D,
diagonal menor = d
Área = $\frac{Dxd}{2}$

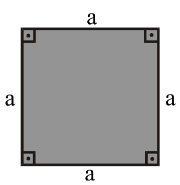
Exemplo: Calcule a área de um losango cujas diagonais medem 8cm e 5cm.

Solução:

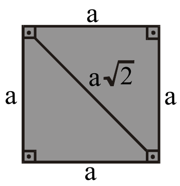
Área = $\frac{8x5}{2} = 20cm^2$

5. Quadrado

É todo quadrilátero que for losango e retângulo ao mesmo tempo.



Em qualquer quadrado sempre valem:
- As propriedades dos losangos.
- As propriedades dos retângulos.
- A diagonal de um quadrado de lado a é a $\sqrt{2}$.



Perímetro = 4a

Área de um quadrado de lado a

Área = a2

Exemplos: **1.** Determine a área de um quadrado cujos lados medem 4cm.

Solução:
Área =4x4= 16Cm^2

2. Determine a área de um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2cm}$.

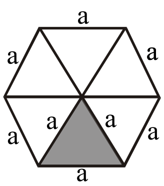
Solução:

Diagonal: a $\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \rightarrow a = 5$

Portanto:
Área = 5 x 5 = 25cm^2

Hexágono Regular

Denominamos por hexágono regular ao polígono convexo de seis lados congruentes e com todos os ângulos internos congruentes.



Em qualquer hexágono regular sempre vale:
• Ele pode ser decomposto em seis triângulos eqüiláteros cujos lados terão a mesma medida dos lados do hexágono.

Área do hexágono regular

Para determinar a área do hexágono regular, calculamos a área de um triângulo eqüilátero com lado de mesmo tamanho e multiplicamos o resultado por 6.

Área $_{\text{hexágono}} = 6x\left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)$

Perímetro = 6^a

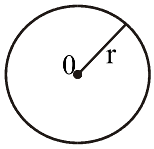
Exemplo: Determine a área de um hexágono regular com lado medindo 2cm.

Solução:

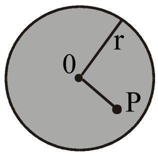
Área $_{\text{hex.}} = 6 \cdot \left(\frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 6 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}cm^2$

Circunferência

Denominamos circunferência ao conjunto de todos os pontos de um plano que eqüidistam ele um ponto fixado no mesmo plano.



Em qualquer circunferência valem:
• O **centro** é o ponto pertencente ao plano da circunferência e que eqüidista de todos os pontos dela;
• Chama-se **raio** a qualquer um dos segmentos que tenha uma extremidade no centro e outra num ponto da circunferência;
• Todos os raios de uma circunferência têm o mesmo comprimento;
• Chama-se **corda** a qualquer segmento cujas extremidades pertençam, a uma mesma circunferência.
• **Diâmetro** é qualquer corda que passe pelo centro de sua circunferência;
• Numa mesma circunferência, um diâmetro tem o dobro da medida de um raio;
Diâmetro = 2 x Raio
• **Círculo** é o conjunto de todos os pontos cuja distância ao centro de uma circunferência seja menor ou igual ao comprimento do seu raio;



Perímetro de um círculo

O perímetro de um círculo é o comprimento da circunferência que o limita.

Per $_{\text{circ.}} = 2 \cdot \pi \cdot r$

onde: π = 3,14159... (número irracional) e r = comprimento do raio

Nas questões de concursos, o valor de π é freqüentemente arredondado para 3,14 ou simplesmente é deixado indicado nas alternativas.

Exemplo: Qual é o perímetro de um círculo que tem raio medindo 5cm?

Solução:
Per =2 x π x r
Per =2 x π x 5=10π cm

ou então, pela última igualdade:

Per = 10 x 3,14 = 31,4 cm

Área de um círculo

A área de um círculo é determinada pela fórmula:

Área $_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$

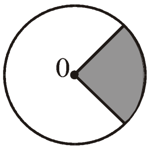
Exemplo: Determine a área de um círculo cujo raio mede 1Ocm.

Solução:

Área = π x r^2
Área = π x 10^2
Área = 100π cm^2
ou então, pela última igualdade:
Área = 100 x 3,14
Área = 314 cm^2

Setor Circular

Denominamos por **setor circular** a qualquer uma das regiões de um círculo que fica limitada por dois de seus raios.



Área de um setor circular

Se **x** é a medida em graus do ângulo de abertura do setor de um círculo de raio **r**, então a área deste setor é determinada por:

$$S = \frac{x}{360} \cdot \pi \cdot r^2$$

Exemplo: Qual o valor da área de um setor de 60° num círculo de raio igual a 6cm?

Solução:

$$S = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 36 = 6\pi \text{ cm}^2$$

ou então, pela última igualdade:

S = 6 x 3,14 = 18,84 cm^2

EXERCÍCIOS ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

1. Calcular a área de um triângulo que tem um de seus lados medindo 12m e altura correspondente, 12m.

2. Calcular a área de um triângulo eqüilátero que tem lados medindo 10cm.

3. Calcular a área de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6dm e 9dm.

4. Calcular a área de um triângulo retângulo que tem um cateto medindo 9dm e hipotenusa medindo 15dm.

5. Calcular a área de um triângulo sabendo que as medidas de seus lados são 7cm, 24cm e 25cm.

6. Calcular a área de um triângulo sabendo que as medidas de seus lados são 12m, 13m e 5m.

7. Calcular a área de um triângulo sabendo que as medidas de seus lados são 12cm, 13cm e 15cm.

8. Calcular a área de um retângulo cujos lados medem 15dm e 6dm.

9. Um retângulo tem perímetro de 30m e as medidas de seus lados são números consecutivos. Qual é a área deste retângulo?

10. Um quadrado tem 100m de perímetro. Qual é a sua área?

11. A diagonal de um quadrado mede 7 $\sqrt{2}$ cm. Qual é a área deste quadrado?

12. Um dos lados e a altura correspondente de certo paralelogramo medem 13dm e 5dm. Calcule sua área.

13. Qual a área de um losango cujas diagonais medem 14cm e 10cm?

14. Num losango cuja área é 24m^2, uma diagonal mede 6m. Qual a medida da outra diagonal?

15. Calcular a área de um hexágono regular com 10dm de lado.

16. Calcular a área de um hexágono regular com 120m de perímetro.

17. Qual é a área de um trapézio de 4cm de altura se suas bases medem 7cm e 9cm?

18. Um trapézio tem suas bases medindo 6m e 9m. Sabendo que sua área é de 30m^2, quanto ele tem de altura?

19. Quanto vale a área de um círculo com um raio de 9m?

20. O diâmetro de um círculo é 12em. Quanto ele tem de área?

21. Qual a área de um círculo que tem 12π dm de circunferência?

22. Calcular a área de um setor de 40° num círculo com 6cm de raio.

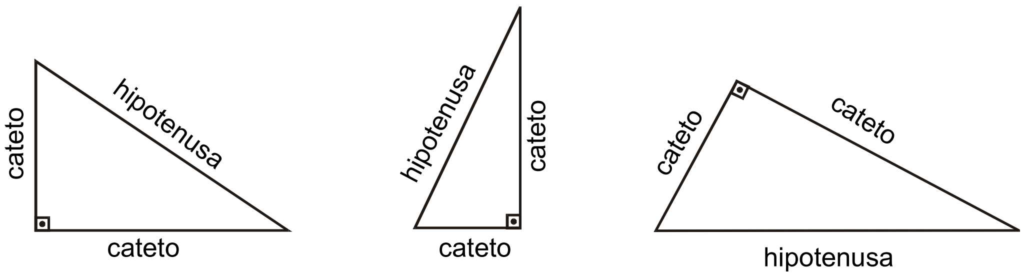
23. Calcular a área de um setor de 30° num círculo com 6cm de raio.

24. Calcular a área de um setor de 60° num círculo com 6cm de diâmetro.

25. Calcular a área de um setor de 40° num círculo com 24π cm de circunferência.

A TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo vamos estudar os triângulos retângulos. Você já sabe que triângulo retângulo é qualquer triângulo que possua um ângulo reto e que , para este tipo de triângulo, há várias propriedades importantes.



- Dois de seus lados são perpendiculares entre si e são , portanto, alturas do triângulo, que facilita o cálculo de sua área:

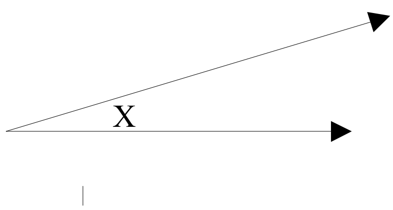
$$A = \frac{cateto \ . \ cateto}{2}$$

- Teorema de Pitágoras : $(\text{ hipotenusa })^2 = (\text{ cateto })^2 + (\text{ cateto })^2$
- Como a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180º, num triângulo retângulo um dos ângulos é reto (90 º) e os outros dois são sempre agudos e complementares (soma = 90º) .

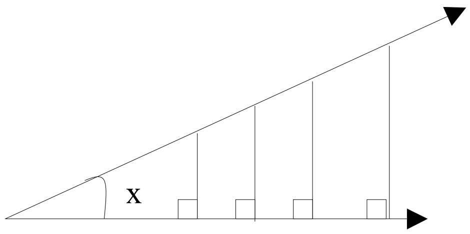
vamos descobrir como podemos estabelecer relações entre ângulos de um triângulo (ângulos agudos) e seus lados. “ será que existem tais ralações ?” É essa nossa primeira preocupação. A seguir, caso existam, serão respondidas perguntas naturais como : “ valem sempre ?” ; “como enuncia-las ?” etc.

Construindo Triângulos Retângulos Semelhantes

Dado um ângulo agudo qualquer, é possível desenhar um triângulo retângulo ?



Sim. Podemos desenhar, na verdade , uma infinidade de triângulos retângulos.

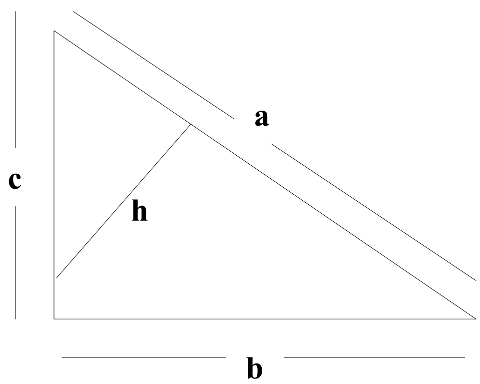


Vamos anotar algumas observações sobre esses triângulos retângulos:

- Para todos eles, um dos ângulos mede x.
- O outro ângulo agudo mede 90º - x, pois é o complemento de x .
- O terceiro ângulo, como não poderia deixar de ser, é reto.
- Então todos eles possuem os mesmos ângulos.
- Lembrando a aula anterior, podemos concluir que : todos estes Triângulos retângulos são semelhantes
- Se são semelhantes , então seus lados são proporcionais .

Podemos então afirmar que, ficando um ângulo agudo, todos os triângulos retângulos, construídos com esse ângulo serão semelhantes e, portanto, terão lados proporcionais. Observe que acabamos de descobrir que há uma relação entre ângulos agudos e lados de um triângulo retângulo .

Precisamos agora verificar como podemos enunciar esse relação mais claramente, usando linguagem matemática.



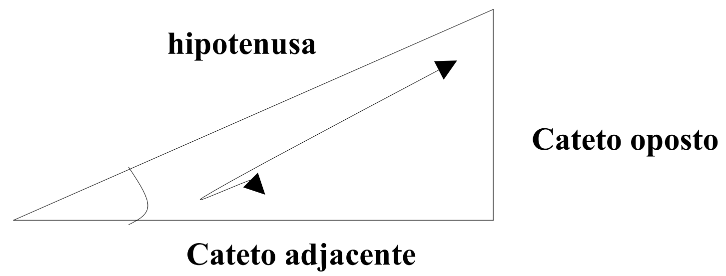
bc = ah

Podemos compreender essa propriedade lembrando como se calcula a área de um triângulo. No caso do triângulo retângulo da figura acima, ela é igual a $\frac{bc}{2}$ e também igual a $\frac{ab}{2}$. Portanto, é claro que bc = ah .

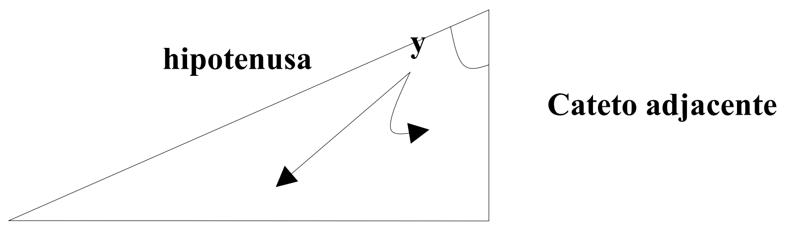
RELACIONANDO LADOS E ÂNGULOS

Você já sabe que, em todo triângulo retângulo. Os lados são chamados hipotenusa (o maior lado) e catetos (lados perpendiculares) . Precisamos, em função dos ângulo, diferenciar a nomenclatura dos catetos. Veja a figura abaixo.

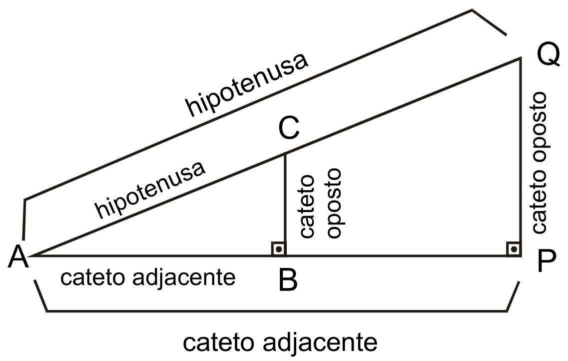
O cateto que fica “ em frente” ao ângulo agudo que estamos utilizando chama-se cateto oposto, e o cateto que está sobre um dos lados desse ângulo chama-se cateto adjacente.



Observe que, se o ângulo do problema for o outro ângulo agudo do triângulo, a nomenclatura oposto e adjacente troca de posição (veja a figura ao lado), pois depende do ângulo utilizado.



Vamos então reescrever as proporções obtidas na figura 1 usando essa nomenclatura . Em relação ao ângulo x , temos :



$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AQ} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AP} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Relações Trigonométricas

As relações que acabamos de generalizar são chamadas relações trigonométricas e recebem nomes especiais.

A primeira é chamada seno do ângulo x e escreve-se :

$$\boxed{\text{Sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}}$$

A segunda é chamada cosseno do ângulo x e escreve-se :

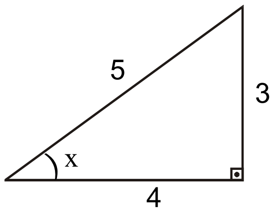
$$\boxed{\text{Cos } x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}}$$

A última denomina-se tangente do ângulo x e escreve-se:

$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}}$$

EXEMPLO 1

Você já conhece o triângulo pitagórico. Vamos obter as relações trigonométricas para um de seus ângulo agudos.

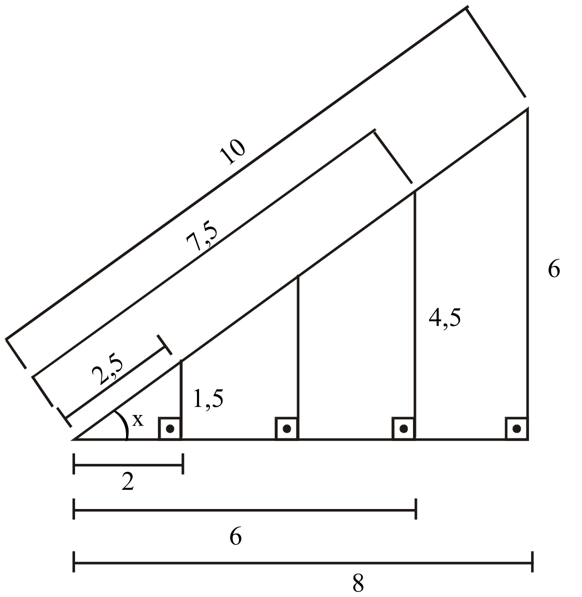


Sen x = 3/5 . 0,6

cos x - $\frac{4}{5}$ - 0,8

tg x = $\frac{3}{4}$ = 0,75

Observe agora que, para qualquer outro triângulo semelhante a este, obtemos o mesmo resultado.



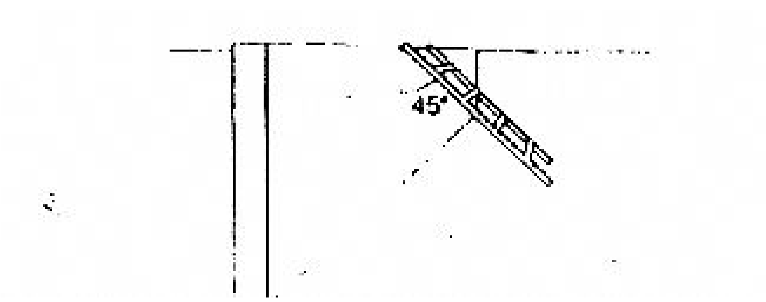
$$\text{sen } x = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{6}{10} = \ldots = 0,6$$

$$\cos x = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5} = \frac{6}{7,5} = \frac{8}{10} = \ldots = 0,8$$

$$\text{tg } x = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = \frac{6}{8} = \ldots = 0,75$$

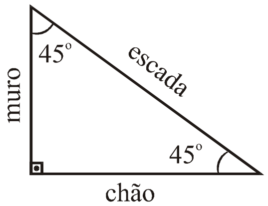
Exemplo 2

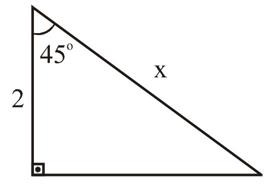
Uma escada está apoiada em um muro de 2m de altura, formando um ângulo de 45º Forma-se, portanto, um triângulo retângulo isósceles. Qual é o comprimento da escada ?



Representando a vista lateral geometricamente, podemos construir o triângulo retângulo a seguir.

Usando o co-seno do ângulo de 45º que a escada forma com o muro, descobrimos o valor de x , que será o comprimento da escada.

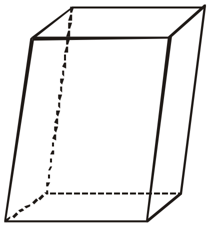




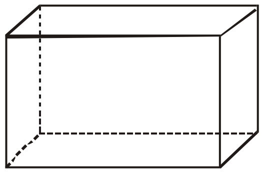
PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Paralelepípedo

Denominamos paralelepípedo a todo sólido geométrico de seis faces, sendo todas elas paralelogramos.



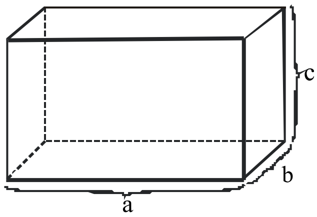
paralelepípedo
oblíquo



paralelepípedo
reto-retângulo

• Num paralelepípedo reto-retângulo, todas as faces são retangulares;

Área total da superfície do paralelepípedo retoretângulo



$$A_{tot.} = 2(ab + ac + bc)$$

Exemplo: Um paralelepípedo reto-retângulo tem dimensões medindo 4cm, 5cm e 6cm. Qual é a área total deste sólido?

Solução:

$$A_{tot} = 2x(4x5+4X6+5X6)$$
$$=2x(20+24+30)$$
$$= 2 \times 74 = 148cm^2$$

Volume do paralelepípedo reto-retângulo:

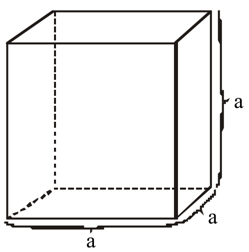
$V=a \times b \times c$

Exemplo: Qual o volume de um paralelepípedo reto-retângulo que tem dimensões de 4cm, 5cm e 6cm?

Solução:

$V= 4 \times 5 \times 6= 120cm^3$

• **Cubo** é um paralelepípedo reto-retângulo onde todas as faces são **quadradas**.



$$A\ tot. = 6 \times a^2$$

$$V =a^3$$

Exemplo: Um cubo tem $24m^2$ de área total. Qual é o volume deste cubo?

Solução:

1°) Área total:

$A_{tot} = 6 \times a^2 = 24\ m^2$

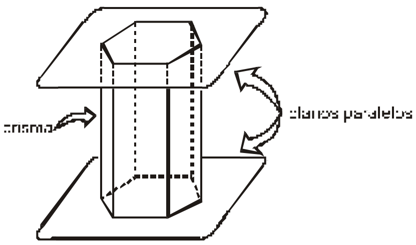
$a^2 = \frac{24}{6} = 4$

$a = \sqrt{4} = 2m$

2°) Volume:
$V = a^3 = 2^3 = 8m^3$

Prisma

Denominamos prisma a todo poliedro de **n + 2** faces onde:
• duas faces situam-se em planos paralelos e são polígonos congruentes com n lados (chamam-se **bases**);
• as outras **n** faces são sempre paralelogramos (chamam-se **faces laterais**).



• **Altura** do prisma é a distância entre os planos de suas bases.
• Os paralelepípedos são prismas cujas bases são paralelogramos.

Volume de um prisma:

V = (área da base) x (altura)

Exemplo: As bases de um prisma são triângulos eqüiláteros com lado medindo 6cm.
Determinar o volume do prisma sabendo que sua altura é 2cm.

Solução:

1°) Cálculo da **área da base** (triângulo eqüilátero)

$A_{base} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}cm^2$

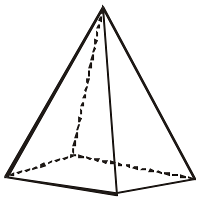
2°) Cálculo do **volume** do prisma:

$V = (A_{base}) \times (altura)$

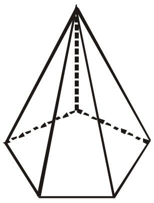
$V = 9\sqrt{3} \times 2 = 18\sqrt{3}cm^3$

Pirâmide

Denominamos pirâmide a todo poliedro de **n + 1** lados onde:
• Uma das faces (a base) é um polígono de **n** lados.
• As outras **n** faces (laterais) são todas triangulares, com um vértice comum a todas elas (vértice da pirâmide).



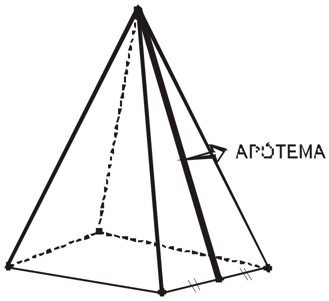
pirâmide com base quadrangular



pirâmide com base pentagonal

• A **altura** de uma pirâmide é a distância do seu vértice até o plano de sua base.
• **Pirâmide regular** é qualquer pirâmide que tenha um **polígono regular** como base e **triângulos isósceles** como faces laterais.

• Numa pirâmide regular, chama-se **apótema** ao segmento com uma extremidade no vértice e outra no ponto médio de um dos lados da base.



Volume de uma pirâmide:

$V_{pir} = \frac{1}{3}$ x (área da base) x (altura)

Exemplo: Qual o volume de uma pirâmide cuja base é um quadrado com 3m de lado se a sua altura é de 2m?

Solução:

1°) Área da base (quadrado)
$A = 3 \times 3 = 9m^2$

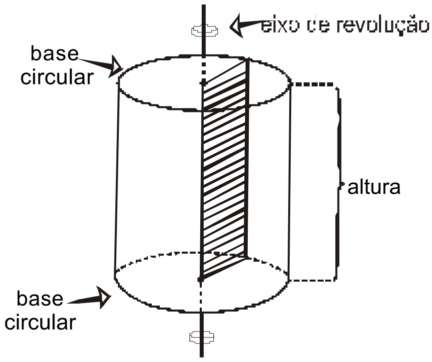
2°) Volume da pirâmide:

$V_{pir} = \frac{1}{3}$ x (A_{base}) x (altura)

$V_{pir} = \frac{1}{3} \times 9 \times 2 = 6m^3$

Cilindro Circular Reto

Denominamos cilindro circular reto ao sólido geométrico formado quando se gira um **retângulo** por um eixo (eixo de revolução) que contém um de seus lados.



• Um cilindro circular reto tem duas faces paralelas, **circulares** e **congruentes** (bases do cilindro).

Área da base: $A_b = ?\ r^2$ (círculo)

• A **altura** de um cilindro é a distância entre os planos de suas bases.

Volume de um cilindro circular reto:

V_{cil} = (área da base) x (altura)

Como a base do cilindro é um círculo, podemos escrever:

$V_{cil} = ?\ R^2 \times h$

onde **R** é o raio da base e h é a altura do cilindro

Exemplo: Calcular o volume de um cilindro com 4cm de altura e 5cm de raio na base.

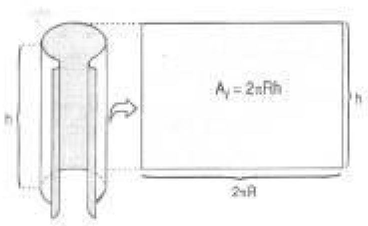
Solução:

1°) Área da base (círculo)
$A_b = ?\ R2$
$Ab = ?\ 5^2 = 25?\ cm^2$

2°) Volume do cilindro:
V_{cil} = (área da base) x (altura)
$V_{cil} = 25?\ \times 4$
$V_{cil} = 100?\ cm^3$

ou, pela última igualdade:
$V_{cil} = 100 \times 3{,}14 = 314\ cm^3$

• A **superfície lateral** de um cilindro circular reto é equivalente à de um retângulo.
(É como o **rótulo** de uma lata: quando o retiramos da lata e desenrolamos, temos um retângulo!)



Exemplo: Quanto mede a superfície lateral de um cilindro com 3cm de altura e 2cm de raio da base?

Solução:
Área da superfície lateral:

$A_? = 2?\ Rh$

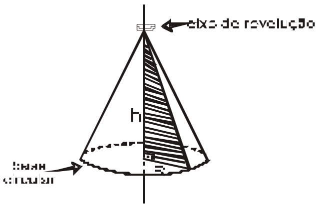
$A_? = 2? \, x2x3 = 12? \, cm^2$

ou, pela última igualdade,

$A_? = 12 \times 3{,}14 = 37{,}68 cm^2$

Cone circular reto

Denominamos cone circular reto ao sólido geométrico formado quando se gira um **triângulo retângulo** por um eixo (eixo de revolução) que contém um dos catetos.



• Um cone circular reto tem sempre uma face **circular** (base do cone) com raio igual a um dos catetos do triângulo retângulo que o formou.

Área da base: $A_b = ? \, R^2$ (círculo)

• A **altura** do cone circular reto é a medida do **cateto** que fica no eixo de revolução.

Volume de um cone circular reto:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \text{(área da base) x (altura)}$$

Como a base do cone é um círculo, podemos escrever:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \times ? \, R^2 \times h$$

onde **R** é o raio da base e **h** é a altura do cone.

Exemplo: Um cone circular reto tem 6m de altura e 2m de raio na base. Qual o volume deste sólido?

Solução:

1°) Área da base (círculo):
$A_b = ? \, R^2$
$A_b = ? \, 2^2 = 4? \, cm^2$

2°) Volume do cone:

$V_{cone} = \frac{1}{3}$ (área da base) X (altura)

$V_{cone} = \frac{1}{3} \times 4? \times 6$

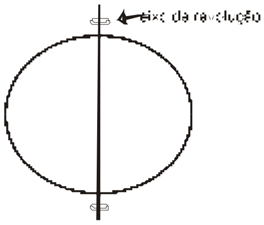
$V_{cone} = \frac{24?}{3} ? 8? cm^3$

ou, pela última igualdade:

$V_{cone} = 8 \times 3{,}14 = 25{,}12 \, cm^3$

Esfera

Denominamos esfera ao sólido geométrico formado quando se gira um **círculo** por um eixo (eixo de revolução) que contém um diâmetro.



• 0 **centro** da esfera coincide com o do círculo que a gerou.
• As medidas do raio e do diâmetro da esfera coincidem, respectivamente com as medidas de raio e diâmetro do círculo.

Volume de uma esfera:

$V_{esf.} = \frac{4}{3} ? r R^3$

Exemplo: Qual o volume de uma esfera que tem raio igual a 3cm?

Solução:

$V_{esf} = \frac{4}{3} X ? X 3^3$
$V_{esf} = \frac{4}{3} x ? X 27$
$V_{esf} = 36 ? cm^3$

ou, pela última igualdade:

$V_{esf} = 36 X 3{,}14 = 113{,}04 cm^3$

• Área da superfície esférica

$A_{esf} = 4 ? A_{circulo}$
ou seja:
$A_{esf} = 4 ? R^2$

Exemplo: Quanto mede a superfície de uma esfera que tem 10cm de raio?

Solução:

$A_{esf} = 4x ? R^2$
$A_{esf} = 4x ? x 10^2$
$A_{esf} = 400 ? cm^2$
ou, pela última igualdade:
$A_{esf} = 400x3{,}14 = 1256 cm^2$

EXERCÍCIOS PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

1. Determinar o volume de um cubo que tem $150m^2$ de área total.

2. Um paralelepípedo reto-retângulo tem dimensões diretamente proporcionais aos números 2, 4 e 5. Determinar o volume deste poliedro sabendo que o comprimento da maior de suas dimensões excede o comprimento da menor em 6m.

3. Qual é a área total de um cubo que tem $64m^3$ de volume?

4. Um prisma tem 6cm de altura. Qual o seu volume se a base é um triângulo retângulo com 5cm de hipotenusa e 4cm em um dos catetos?

5. Um prisma tem como base um triângulo eqüilátero com 6cm de perímetro. Determinar o volume deste prisma sabendo que ele tem 5cm de altura.

6. Uma pirâmide tem base quadrada com 20dm de perímetro e tem 12dm de altura. Qual é o volume desta pirâmide?

7. Uma pirâmide quadrangular regular tem apótema medindo 5cm e tem 6cm de aresta de base. Determinar o seu volume.

8. Qual é o volume de um cilindro circular reto que tem ? cm de altura se o perímetro de sua base é 2? cm?

9. Quanto mede a superfície lateral de um cilindro circular reto com 2m de altura e 13m de perímetro na base?

10. O cateto maior de um triângulo retângulo é o eixo de revolução de um certo sólido. Determine o volume deste sólido sabendo que o triângulo tem hipotenusa medindo 13m e cateto menor medindo 5m.

11. Qual a área da base de um cone circular reto que tem 4cm de altura e volume de $8cm^3$?

12. Um círculo com 4? dm^2 de área gera urna esfera por revolução. Qual o volume desta esfera?

13. Se a área de uma superfície esférica é 16? cm^2, qual o volume da esfera correspondente?

14. As arestas de um cubo foram todas multiplicadas por uma constante positiva k, originando, assim, um novo cubo. Sendo V_1 o volume do cubo original, determinar o volume do novo cubo em função de V_1 e de k.

15. Somando-se os comprimentos de todas as arestas de um cubo obteve-se 48cm. Qual é o volume deste cubo?

16. Somando-se os comprimentos de todas as ares tas de um paralelepípedo reto-retângulo obteve-se 72m. Sabe-se que as dimensões deste sólido são diretamente proporcionais aos números l, 2 e 3. Qual é o seu volume?

17. A base de um prisma é um hexágono regular e suas faces laterais são todas quadradas. Determinar a altura deste prisma sabendo que seu volume é de $12\sqrt{3}m^3$.

18. Uma pirâmide regular de base quadrada recebe um corte que vai do vértice até a base, dividindo-a em duas pirâmides congruentes e com bases retangulares. Sabendo que uma das faces originadas pelo corte é um triângulo eqüilátero com 2cm de lado, determinar o volume da pirâmide original.

19. Corta-se um cilindro circular reto ao meio. Sabe-se que o corte origina, em cada uma das partes resultantes, uma face quadrada com área igual a $16cm^2$. Determinar o volume do cilindro original.

20. A medida do diâmetro da base de um cilindro circular reto é igual à da sua altura. Sabe-se que o volume é de 54? m^3. Qual é o raio da base?

RESPOSTAS

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS
1. c
2. b
3. e
4. d
5. c
6. a
7. c
8. b

NÚMEROS INTEIROS-OPERAÇÕES E PROPRIEDADES
Exercícios Propostos
1. 82
2. 206
3. 20 e 31
4. 167
5. R$ 930,00
6. 4.256.000
7. R$ 1.440
8. 110 litros
9. Cada menino recebeu 36 e cada menina, 48
10. Marta: R$ 110,00, Marisa: R$ 90,00 e Yara: R$ 75,00
11. R$ 622,00
12. Renato: 15 e Flávia: 8

NÚMEROS RACIONAIS - OPERAÇÕES E PROPRIEDADES
Exercícios Propostos

1. a) $\frac{5}{12}$
b) $3\frac{1}{30}$
2. a) $\frac{3}{8}$
b) $3\frac{1}{3}$
3. a) $\frac{7}{8}$
b) $1\frac{7}{8}$
4. V, V, V
5. 900
6. 560
7. $\frac{4}{7}$
8. $\frac{2}{7}$
9. 4
10. 3
11. 90 cm
12. 200km
13. R$ 210,00
14. Antônio: 6 anos, Benedito: 36 anos, César: 3 anos e Dilson: 9 anos
15. 60
16. R$ 180,00; R$ 60,00; R$ 30,00
17. R$ 50,00
18. R$ 700,00
19. 18
20. R$ 60,00 no bolso esquerdo e R$ 56,00 no bolso direito

RAZÕES E PROPORÇÕES
Exercícios Propostos
1. a) 25; b) 20/3; c) 1/6

2. a) 12; b) 36; c) 1/8
3. a)6; b)12; c)8
4. 18 e 30
5. 90 e 150
6. 32 e 40
7. 48 e 60
8. 8 e 28
9. 32 e 112
10. 110 e 130
11. -21 e –9
12. 6 e 10 ou -6 e -10
13. 60, 72 e 84
14. 60, 80 e 100
15. 35, 42 e 49
16. 14, 35 e 49
17. 15 litros
18. 10
19. 20 e 16
20. 77 e 55

DIVISÃO PROPORCIONAL
Exercícios Propostos
1. X = 40, Y = 50 e Z = 60
2. X = 24, Y = 56 e Z = 72
3. X = 15 e Y = 12
4. X = 10, Y = 12 e Z = 20
5. X = 2 e Y = 1
6. 125, 175 e 325
7. 312, 408 e 480
8. 12, 4 e 80
9. 12 e 9
10. 180, 144 e 120
11. 420, 350 e 320
12. 48 e 60
13. 60, 150 e 350
14. R$ 120.000,00, R$ 180.000,00 e R$ 160.000,00
15. 38 anos e 22 anos

REGRA DE TRÊS
Exercícios Propostos
1. C - E - C - E
2. C - E - C - E - E
3. D- I - I - D - D - D - I - I – D - I - D - I
4. V - V - V - V - F
5. R$ 41,00
6. 6,5kg
7. 312,5kg
8. 5 dias
9. 1h 30min
10. 2.700 voltas
11. 65 voltas
12. 36m
13. 3min 30s
14. 15h
15. 60 metros
16. Para 3/4 da quantidade original
17. 110m
18. 54m
19. 120 pulos
20. 3 minutos
21. 21 dias
22. 45 dias
23. R$ 450,00
24. 30 operários
25. 39 operários

EXERCÍCIOS - PORCENTAGENS
1. 42%
2. 70.000
3. R$1.820,00

4. 62min 30s
5. 292.820 hab
6. 16
7. a) 2,4%
b) 90%
8. $2m^3$
9. 52
10. R$ 820,00
11. R$ 125,00
12. R$1.500,00
13. 8%
14. Prejuízo de 4%
15. 150%

TESTES -PORCENTAGENS
1. b
2. a
3. b
4. a
5. c

EQUAÇÕES DO 1º GRAU
Exercícios Propostos
1. {- 11}
2. {9}
3. {10}
4. {1}
5. {0}
6. {-8}
7. {2}
8. {1}
9. {7/2}
10. {0}

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1° GRAU COM DUAS VARIÁVEIS
Exercícios Propostos
1. a) (3; 2)
b) (5; 1)
c) (7; 2)
d) (4; 3)
e) (3; -1)
f) (2; -2)
g) (2; -1)
h) (6; 1)
2. 53 e 32
3. 15 e 18
4. 13 perguntas
5. 15/23
6. 13 galinhas e 17 coelhos.
7. 8 professores.
8. 36
9. 375 rapazes e 150 moças.
10. José Antônio tem 28 anos e Antônio José tem 21 anos.

EQUAÇÕES DO 2° GRAU
Exercícios Propostos
1. a) ± 5
b) ±6
c) ± 14
d) ± 35
e) $\pm 2\sqrt{2}$
f) $\pm 2\sqrt{5}$
2. a) {0; 6 }
b) {0; -6}
c) {0; 3/2}
d) {0; 7/5}
e) {0; 15/19}
f) {0; -6}

3. a) {1; 12}
b) {2; 6}
c) {-3; -4}
d) {2; 18}
e) {-3;-12}
f) {-1; +12}
g) {1;-12}
h) {-3; 4}
i) {3; -4}
j) {-3; 12}
k) {-2; 10}
l) {-4; 5}
m) {-3; 4}
n) {1;-36}
o) {1; 36}
4. a) {1/2; -2}
b) {1/3; 1/5}
c) {-1/3; -1}
d) {1/2; 2}
5. -2 é raiz.
6. m = 2
7. m = 11
8. m = -5 ou m = 19
9. 3 e -5
10. 10 e 11
11. 8
12. 7
13. 2
14. 10 e 12
15. 9

INEQUAÇÕES DO 1°GRAU
Exercícios Propostos
1. {x **<** -8}
2. {x ≥ 2}
3. {x ≥ 1}
4. {x **<** 7/2}
5. {x **>** 22/3}
6. {x ≤ 2/13}
7. {x ≤ 4}
8. {x ≠ 0}
9. {x **>** 1}
10. {x **<** 22/9}

INEQUAÇÕES DO 2° GRAU
Exercícios Propostos
1. {x **< -**12 ou x **>** 1)
2. {-3 ≤ x ≤ 4)
3. {x ≠ 3)
4. {x = -8}
5. ∅

SISTEMAS LINEARES
1. a) (3; 2)
b) (5; 1)
c) (7; 2)
d) (4; 3)
e) (3; -1)
f) (2; -2)
g) (2; -1)
h) (6; 1)
2. a
3. b
4. e
5. d
6. a
7. c
8. d
9. a

10. b
11. 15/23
12. 13 galinhas e 17 coelhos.
13. 36
14. 6 cobras, 5 sapos, 3 morcegos (e 1 coelho - o paulo coelho)
15. O primeiro é 15, o segundo é 25 e o terceiro é 45.
16. José antônio tem 28 anos e antônio josé tem 21 anos.
17. X = 22, y = 24 e z = 8
18. O projeto b: $ 225,00
19. $ 2.816,00
20. a: 1kg; b: 2kg e c: 2kg
21. c
22. d
23. b

FUNÇÃO DE 1° GRAU
Exercícios Propostos
1. d
2. a
3. c
4. e
5. a
6. b
7. b
8. d

FUNÇÃO DE 2° GRAU
Exercícios Propostos
1. c
2. b
3. c
4. d

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

GRÁFICOS
1. 46,4 milhões
2. 35%

MÉDIAS
1. c
2. c
3. b
4. a
5. c
6. b
7. d
8. d
9. e
10. a
11. a
12. a
13. c

MODA
1. c
2. c
3. b
4. e
5. c
6. b
7. b
8. c
9. c
10. c

MEDIANA
1. a

2. b
3. c
4. a
5. a
6. b
7. c
8. d

DESVIO PADRÃO
1. a
2. b
3. e

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS
1. a) 7
b) 5
c) -2
d) 3
e) 1/3
2. a) 97
b) 123
c) 1
d) -3
e) 13/3
3. a) 30
b) 75
c) 150
d) -760
e) 818
f) 200
4. a) 118
b) 440
c) 25
d) 21
e) 948
f) 370
g) -3
h) 35
5. a) r=8
b) r=5
c) r=-4
d) r=-5
e) r=10
f) r=2
g) r=1/2
h) r=-2
6. a) n=21
b) n=7
c) n=15
d) n=100
e) n=50
f) n=50
7. a) 24
b) 25
c) 50
d) 37
e) 25
8. 22
9. 2x -4 (para todo x)
10. 5050
11. 900
12. 770
13. 728
14. 1.848
15. 370

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS
1. a) 2
b) 1/2

c) -2
d) 0
e) -2
f) -1 /2
g) $\sqrt{2}$
h) $\sqrt[3]{2}$
I) $-\sqrt{2}$

2. a) 256
b) 7.290
c) 20.480
d) 0,01
e)2
f) 64

3. a) 320
b) 216,F3
c) -4
d) 1.280

4. a) 2
b) -2
c) ±5
d) ±2
e) ±2
f) ±3

5. a) 2
b) -6
c) $2\sqrt[3]{5}$
d) -4
e) $4\sqrt{3}$

6. a) 7
b) 9
c) 7
d) 6
e) 6
f) 6

7. 2.040

8. $S_n = 4(4^n - 1)$

9. $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

10. $\dfrac{16}{3}$

11. $12\sqrt{3}\text{cm}^2$

PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

1. a
2. e
3. d
4. b
5. e
6. a
6. b
8. c
9. d
10. b
11. a
12. e
13. b
14. d
15. c
16. a

PROBABILIDADES

1. $\dfrac{1}{5}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{7}{10}$

4. $\frac{1}{6}$

5. $\frac{7}{18}$

6. $\frac{7}{12}$

7. $\frac{5}{12}$

8. $\frac{7}{25}$

9. $\frac{1}{8}$

10. $\frac{3}{5}$

11. $\frac{3}{28}$

12. $\frac{1}{3}$

13. $\frac{5}{16}$

14. $\frac{5}{72}$

PERÍMETROS E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

1. $72m^2$
2. $25\sqrt{3}cm^2$
3. $27dm^2$
4. $54dm^2$
5. $84cm^2$
6. $30m^2$
7. $20\sqrt{14}cm^2$
8. $90dm^2$
9. $56m^2$
10. $625m^2$
11. $49cm^2$
12. $65dm^2$
13. $70cm^2$
14. 8m
15. $150\sqrt{3}dm^2$
16. $600\sqrt{3}m^2$
17. $32cm^2$
18. 4m
19. $81\pi\ m^2$
20. $36\pi\ cm^2$
21. $36\pi\ dm^2$
22. $4\pi\ cm^2$
23. $3\pi\ cm^2$
24. $\frac{3\pi}{2}cm^2$
25. $16\pi\ cm^2$

GEOMETRIA ESPACIAL: ÁREA E VOLUMES DOS SÓLDOS

1. $125m^3$
2. $320m^3$
3. $96m^2$
4. $36cm^3$
5. $5\sqrt{3}cm^3$
6. $100dm^3$
7. $48cm^3$
8. $\pi^2 cm^3$
9. $26m^2$
10. $100\pi m^3$
11. $6cm^2$
12. $\frac{32\pi}{3} dm^3$
13. $\frac{32\pi}{3} cm^3$
14. $k^3 \cdot V_1$
15. $64cm^3$
16. $162m^3$
17. 2m
18. $32\sqrt{3}cm^3$
19. $16\pi cm^3$
20. 3m